413

226

Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$. Exemples et applications.

[SN3-X]

I] Dépendance selon f.

1) Fonction monotone [Gou]

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(I)\subset I$. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $u_0\in I$ et $u_{n+1}=f(u_n)$.

Prop 1 : • Si f est croissante, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et son sens de monotonie est donné par le signe de u_1-u_0.

• Si f est décroissante, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et de sens de monotonie opposé.

Ex 2 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0>0$ et $\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2-\sqrt{u_n}}$

• Si $u_0\in[0,1[$, u_n tend en croissant vers 1.

• Si $u_0=1$, la suite u_n est stationnaire à 1.

• Si $u_0\in]1,\frac{3+\sqrt5}{2}[$ la suite u_n tend en décroissant vers 1.

• Si $u_0 = \frac{3+\sqrt5}{2}$, u_n est stationnaire à $\frac{3+\sqrt5}{2}$

• Si $u_0>\frac{3+\sqrt5}{2}$, u_n n'est pas bien définie.

2) Cas où f est continue

Soit (E,d) un espace métrique et $f: E\longrightarrow E$. On considère $u_{n+1}=f(u_n)$

Prop 3 : Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\in E$ et si f est continue en ℓ alors $f(\ell)=\ell$.

Ex 4 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0\in\mathbb{R}$ et $u_{n+1}=u_n+e^{-u_n}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Appli 5 : Soit $f:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ continue, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in[0,1]^{\mathbb{N}}$ tel que $u_{n+1}=f(u_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$, on a l'équivalence : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Longleftrightarrow \left(\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=0\right)$

3) Suites arithmétiques et géométriques

DÉF 6 : On appelle suite arithmétique une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeur dans un espace vectoriel E définie par $u_{n+1}=u_n+a$ avec $a\in E$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison a.

Prop 7 : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=u_0+na$

Déf 8 : On appelle suite géométrique de raison q une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes ou réelles définie par $u_{n+1}=qu_n$.

Prop 9 : $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n=q^nu_0$ et si $|q|>1$ la suite diverge, si $|q|<1$ la suite converge vers 0 et si $q=1$ la suite est stationnaire.

4) Récurrences linéaires à coefficients constants.

Déf 10 : On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexe vérifie une récurrence linéaire d'ordre h à coefficients constants si
$\forall n\geq h$ $u_n=a_1u_{n-1}+a_2u_{n-2}+\dots+a_hu_{n-h}$, $(a_1,\dots,a_h)\in\mathbb{C}^h$ (*)

Prop 11 : L'équation $x^h-a_1x^{n-1}-\dots-a_h=0$ s'appelle équation caractéristique de la récurrence (*). Si on note $r_1,\dots,r_q$ ses racines et $\alpha_1,\dots,\alpha_q$ leurs ordres de multiplicités respectifs alors l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (*) est l'ensemble des suites de la forme $u_n=P_1(n)r_1^n+\dots+P_q(n)r_q^n$ où $\forall i$ P_i est un polynôme vérifiant $\deg(P_i)<\alpha_i$.

Ex 12 : (Suite de Fibonacci) $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases}F_0=0 \text{ et}\\ F_1=1\end{cases}$ $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ $\forall n\geq0$, alors $F_n=\dfrac{(1+\sqrt5)^n-(1+\sqrt5)^n}{\sqrt5\,2^n}$

Ex 13 : On montre que les applications $f:\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}_+^*$ qui vérifient $\forall x>0$ $f\circ f(x)=6x-f(x)$ sont $f: x\longmapsto 2x$

[X-ENS]

5) Cas où f est une homographie [DuF]

DÉF 14 : Soient $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tel que $c\neq0$ et $ad-bc\neq0$. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ homographique est une suite réelle définie par $\begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{au_n+b}{cu_n+d} & \forall n\in\mathbb{N}.\\ u_0\in\mathbb{R}\end{cases}$

Prop 15 : Soit f définie par $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec les conditions précédentes sur a,b,c,d.
et u_n vérifiant $f(u_n)=u_{n+1}$, $u_0\in\mathbb{R}$.
On considère l'équation (E) : $cx^2-(a-d)x-b=0 \Longleftrightarrow f(x)=x$.
$\Delta=(a-d)^2+4bc$. Si $\Delta>0$, (E) admet deux racines distinctes α et β et $\forall n\in\mathbb{N}$ $\dfrac{u_n-\beta}{u_n-\alpha}=R^n\left(\dfrac{u_0-\beta}{u_0-\alpha}\right)$ où $R=\left(\dfrac{c\alpha+d}{c\beta+d}\right)$ si $u_0\neq\alpha$.

• Si $\Delta<0$, f n'a pas de points fixes donc (u_n) diverge

• Si $\Delta=0$, f a un unique point fixe α et si $u_0\neq\alpha$ et $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\frac{1}{u_n-\alpha}=\frac{1}{u_0-\alpha}+\frac{2nc}{a+d}.$$

<u>Ex 16</u> $\begin{cases} w_0=1 \\ \forall n\in\mathbb{N}^*\ w_{n+1}=\dfrac{w_n}{w_n+2}\end{cases}$, $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

6) <u>Cas où f est contractante</u> [Rou]

Théorème du point fixe de Picard : Soit (E,d) un espace métrique complet non vide et f une application strictement k-contractante avec $k\in]0,1[$ alors f admet un unique point fixe $x\in E$ et ce point fixe est la limite de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'approximations successives définies par $\begin{cases} x_0\in E \\ \forall n\in\mathbb{N}\ x_{n+1}=f(x_n)\end{cases}$ et on a $\forall n\in\mathbb{N}$ $d(x_n,a)\leq\dfrac{k^n}{1-k}d(x_1,x_0)$.

<u>Théorème 17</u> : Si $f: E\to E$ est une application telle que l'un des itérés $f^p=f\circ\dots\circ f$ soit strictement contractante, elle admet alors un unique point fixe dans E limite de toute suite d'approximations successives.

<u>Appli 18</u> : (Cauchy-Lipschitz Global). I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\begin{cases} t_0\in I \\ x\in\mathbb{R}^m\end{cases}$ $f: I\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ une application continue, globalement lipschitzienne en y alors $\begin{cases} y'=f(t,y) \\ y(t_0)=x\end{cases}$ admet une unique solution $t\mapsto y(t)$ définie sur I tout entier.

II] <u>Classification des points fixes</u> [Dem]

1) <u>Cas réel</u>

$f: I\to I$ où I intervalle de $\mathbb{R}$ qui est fermé, $f\in C^1(I)$ et $a\in I$ un point fixe de f

<u>Déf 19</u> : • Si $|f'(a)|<1$ on dit que a est un point fixe attractif de f

• Si $f'(a)=0$, on dit que a est un point fixe superattractif de f

• Si $|f'(a)|>1$, on dit que a est un point fixe répulsif de f.

<u>Prop 20</u> : Si a est un point fixe attractif de f, $\forall k$ tel que $|f'(a)|<k<1$ $\exists h>0$ tel que $\forall x_0\in[a-h,a+h]=E$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$ avec $\forall n\in\mathbb{N}$ $|x_n-a|\leq k^n|x_0-a|$

<u>Prop 21</u> : Si a est un point fixe superattractif de f et que $f\in C^2(I)$ alors on a une meilleure vitesse de convergence que dans <u>Prop 20</u>.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad |x_n-a|\leq\frac{2}{M}\left[\frac{M}{2}|x_0-a|\right]^{2^n}\quad\text{où } M=\max_{x\in E}|f''(x)|$$

<u>Prop 22</u> : Si a est un point fixe répulsif de f <u>alors</u> $\exists h>0$ tel que $\forall x\in[a-h,a+h]\setminus\{a\}$ $|f(x)-a|>|x-a|$

<u>Rem 23</u> : Sur la figure 1 on a représenté le cas où a est un point fixe attractif, superattractif et répulsif de f.

<u>Rem 24</u> : Si $f'(a)=\pm1$, il y a discussion.

<u>Ex 25</u> : $f(x)=\sin(x)$, $I=[0,\frac{\pi}{2}]$. Sur $]0,\frac{\pi}{2}]$, $\sin(x)<x$ et $\forall x_0\in]0,\frac{\pi}{2}]$ la suite $u_{n+1}=\sin(u_n)$ est strictement décroissante et minorée donc converge vers 0.

<u>Ex 26</u> : $f(x)=\operatorname{sh}(x)$, $I=[0,+\infty[$. Comme $\operatorname{sh}(x)>x$ $\forall x\in]0,+\infty[$, la suite $u_{n+1}=\operatorname{sh}(u_n)$ vérifie la <u>Prop 22</u>, $\forall x_0>0$, $x_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$

<u>Appli 27</u> : Résoudre $f(x)=x^3-4x+1=0 \iff$ Trouver les points fixes de φ où $\varphi(x)=\frac{1}{4}(x^3+1)$. Trois racines réelles donc trois points fixes a_1, a_2 et a_3 où $a_1<a_2<a_3$ avec a_2 attractif et a_1, a_3 répulsif. On utilise φ^{-1} pour a_1 et a_3.

2) <u>Cas $\mathbb{R}^n$</u>

Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ de classe C^1 et N une norme de $\mathbb{R}^n$

<u>Lemme 28</u> : 1) Si φ est k-lipschitzienne sur Ω relativement à N alors $|||Df(x)|||_N\leq k$ $\forall x\in\Omega$

2) Si Ω est convexe et si $|||Df(x)|||_N\leq k$ $\forall x\in\Omega$ alors φ est k-lipschitzienne sur Ω relativement à N.

<u>Théorème 29</u> : Soit $a\in\Omega$ point fixe de f. Alors on a l'équivalence entre :

i) $\exists V\in\mathcal{V}(a)$ fermé tel que $f(V)\subset V$ et une norme N sur $\mathbb{R}^n$ telle que $f_{|V}$ soit contractante pour N

ii) $\rho(Df(a))<1$ où $\rho(M)$ est le rayon spectral de M

On dit alors que a est un point fixe attractif

Ex 30 : $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ où $\begin{cases} X = -x + \frac{3}{2}y + \frac{5}{4} \\ Y = -\frac{1}{2}x + y^2 + \frac{3}{4} \end{cases}$ $S = \{(1, \frac{1}{2}), (\frac{41}{32}, \frac{7}{8})\}$

$\rho(D\varphi(1, \frac{1}{2})) = 1/2$

$\rho(D\varphi(\frac{13}{4}, \frac{7}{8})) = 1$

3) Orbites périodiques [X-ENS]

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une application continue

DEF 3) : Si α est un point fixe de f^p qui n'est pas un point fixe de f^k si $k<p$ alors α est un point p-périodique et son orbite est $\{\alpha, f(\alpha), \dots f^{p-1}(\alpha)\}$.

Théorème de Sarkovski : Si f admet un point 3-périodiques alors il existe un point n-périodiques $\forall n \in \mathbb{N}^*$ [DVP]

Ex 32 : $T : [0,1] \to [0,1]$ définie par $\begin{cases} T(x) = 2x \text{ sur } [0, 1/2] \\ T(x) = 2 - 2x \text{ sur } [1/2, 1] \end{cases}$, Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, le plus petit point fixe de T^n est un point n-périodique. (fig 2)

III] Applications aux méthodes numériques

1) Résoudre $f(x) = 0$ [Dem] [Roo]

a) Cas de la dimension 1

. Méthode de Newton : (fig 3) résoudre $f(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = x$ en posant $\varphi(x) = x + f(x)g(x)$ avec g bien choisie. Si a zéro de f, on veut que a soit un point fixe superattractif de φ donc si possible $g(x) = \frac{-1}{f'(x)}$ et on itère φ en prenant x_0 "pas trop loin de a"

Théorème 33 : Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 avec $c<d$, $f(c)<0<f(d)$ et $f'(x)>0$ $\forall x \in [c,d]$. Soit a l'unique zéro de f sur $[c,d]$, on considère $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Alors

(P) 1) $\exists \alpha > 0$ tel que si $I = [a-\alpha, a+\alpha]$ alors $\varphi(I) \subset I$ et la suite définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ a une convergence d'ordre deux vers a dans I : $\exists C > 0$ telle que $\forall n \geq 0$ $|x_{n+1} - a| \leq C|x_n - a|^2$

2) De plus si $f''_{|[c,d]} > 0$ alors l'intervalle $I' = [a,d]$ est stable par φ et $\forall x_0 \in I$ (x_n) est soit constante soit strictement décroissante avec $0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$ et si $x_0 \neq a$, $x_{n+1} - a \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2$

Ex $f(x) = x^2 - \frac{1}{4} = 0$. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x - f(x) \Leftrightarrow x = -x^2 + x + \frac{1}{4} = \varphi(x)$

. $x_0 < -\frac{1}{2}$ la méthode diverge . si $x_0 = -\frac{1}{2}$, $x_k = -\frac{1}{2}$ $\forall k \geq 0$.

. $x_0 = \frac{3}{2}$, $x_k \to 1/2$. Si $x_0 > \frac{3}{2}$ la méthode diverge

Méthode de la sécante : Si l'on a pas accès à f' on la remplace par le taux d'accroissement de f sur un petit intervalle. On suppose que l'on a deux valeurs approchées x_0 et x_1 de la racine a de $f(x) = 0$ $(x_0 < a < x_1)$. On pose $\tau_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ puis $\tau_n = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ et $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\tau_n}$ (fig 4)

Théorème 34 : Si f est de classe C^2 et de dérivée $f' \neq 0$ sur $I = [a-r, a+r]$. On définit pour $i = 1, 2$ $M_i = \max_{x \in I} |f^{(i)}(x)|$, $m_i = \min_{x \in I} |f^{(i)}(x)|$, $K = \frac{M_2}{2m_1}\left(1 + \frac{M_1}{m_1}\right)$ et $h = \min(r, \frac{1}{K})$. Soit enfin (S_p) la suite de Fibonacci alors $\forall (x_0, x_1) \in [a-h, a+h]$ distincts on a $|x_p - a| \leq \frac{1}{K}[K \max(|x_0 - a|, |x_1 - a|)]^{S_p}$

b) Cas de la dimension $n \geq 2$

$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert.

Méthode de Newton-Raphson : même idée que précédemment mais en utilisant Df, on itère $\varphi(x) = x - Df(x)^{-1}f(x)$.

Théorème 35 : Si f est C^2, que $f(a) = 0$ et $Df(a)$ est inversible alors a est un point fixe superattractif de φ et $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall x_0 \in B(a, \varepsilon)$ $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers a de manière quadratique.

2) Résolution de système linéaire.

But : A matrice inversible, b un vecteur, on veut résoudre $Ax = b$.

a) Méthode du gradient à pas optimal. [H-U]

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c$ où $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$

Problème de minimisation : (P) : Minimiser $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$

Théorème 36 : $\exists!$ solution a de (P) caractérisé par $\nabla f(a) = 0$ et l'algorithme du gradient à pas optimal défini par $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ \forall k \in \mathbb{N}\ x_{k+1} = x_k + t_k d_k \end{cases}$ où $d_k = -\nabla f(x_k)$ et t_k est l'unique réel minimisant $t \mapsto f(x_k + td_k)$ converge vers a.

b) méthode de Jacobi et Gauss-Seidel [Cia]

Méthode : x_0 donné, $x_{n+1} = Bx_n + c$ où B et c construit à partir de A et b

la méthode converge si $\forall x_0$, $x_n \to x$.

On veut décomposer $A = M - N$ où M facile à inverser et inversible.

$Au = b \Leftrightarrow Mu = Nu + b \Leftrightarrow u = \underbrace{M^{-1}N}_{B}u + \underbrace{M^{-1}b}_{c}$ et $A = \begin{pmatrix} D & -F \\ -E & \end{pmatrix}$

Méthode	Décomposition $A = M - N$	Matrice $M^{-1}N$ de la méthode	Description d'une itération
Jacobi	$A = D - (E+F)$	$J = D^{-1}(E+F) = I - D^{-1}A$	$Du_{k+1} = (E+F)u_k + b$
Gauss seidel	$A = (D-E) - F$	$L_1 = (D-E)^{-1}F$	$(D-E)u_{k+1} = Fu_k + b$

Théorème 37 : On a les équivalences : 1) la méthode converge $\Leftrightarrow$ 2) $\rho(B) < 1$ $\Leftrightarrow$ 3) $\|B\| < 1$ pour au moins une norme matricielle.

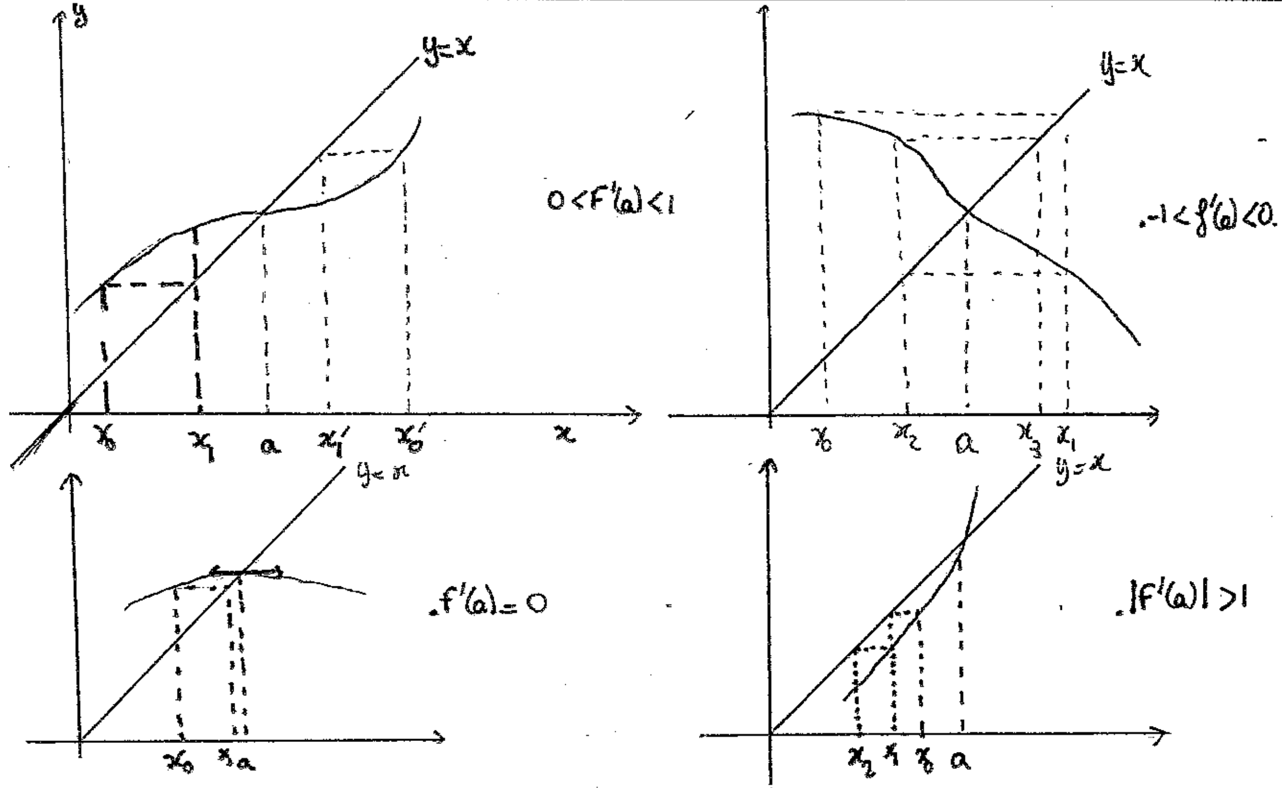

Figure 1 : Cas où a est un point attractif, superattractif et répulsif.

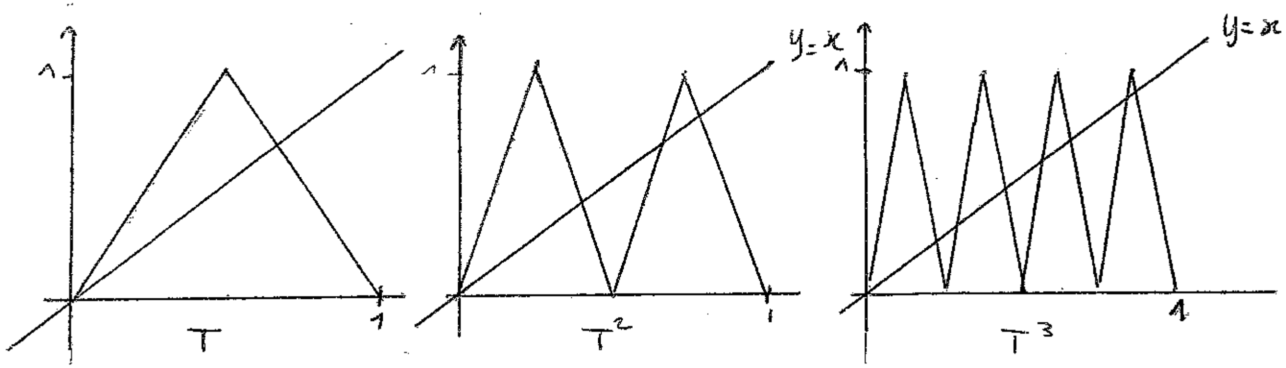

figure 2 : Graphe de T, T² et T³

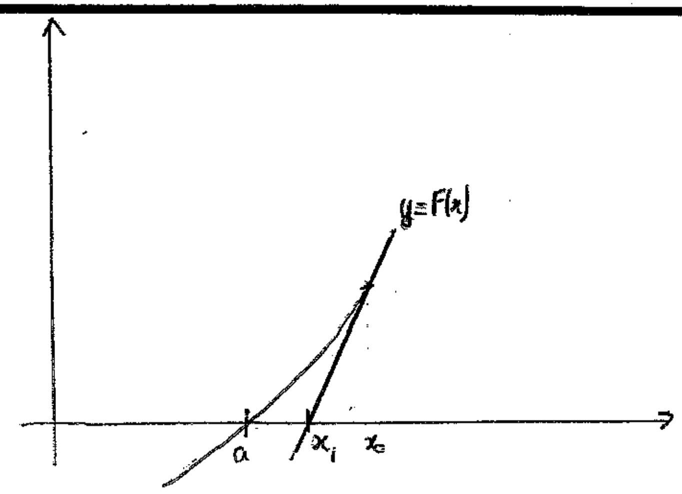

figure 3 : méthode de Newton

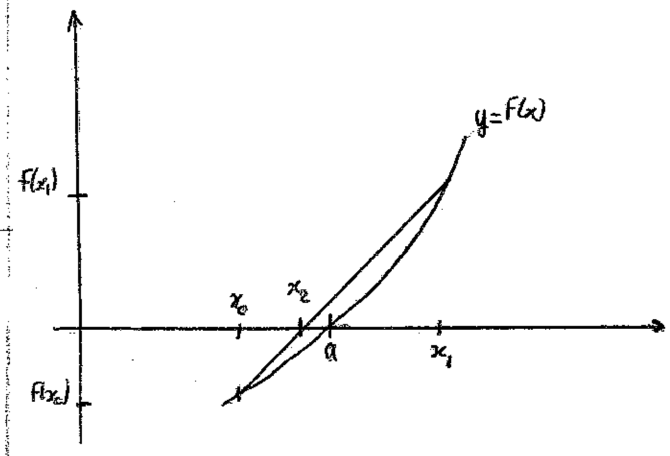

figure 4 : méthode de la sécante.

[GOU] = Gourdon Analyse
[X-ENS] : oraux analyse Tome 1
[Rou] : Rouvière Petit guide du calcul différentiel
[H-U] : Jean Baptiste Hiriart Urruty : Optimisation et analyse convexe
[Cia] : Ciarlet : Introduction à l'analyse numérique matricielle
et à l'optimisation.
[Dufetel] : Analyse.