226 — Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Application à la résolution approchée d'équations.

(Gou)

I- GENERALITÉS SUR LES SUITES RECCURENTES

Def 1 : Soit E un espace métrique. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E est dite reccurente d'ordre h si $\forall n \geq h$, $u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_{n-h})$.

1. Suites arithmétiques et/ou géométriques.

Def 2 :
- suite arithmétique : $u_{n+1} = u_n + r \leadsto u_n = u_0 + rn$
- suite géométrique : $u_{n+1} = q \cdot u_n \leadsto u_n = q^n u_0$
- suite arithmético-géométrique : $u_{n+1} = au_n + b$

Prop 3 : conditions de convergence
- suite arithmétique : converge ssi $r = 0$, ie (u_n) constante
- suite géométrique : converge ssi $|q| < 1$ ou $q = 1$
- suite arithmético-géométrique : converge ssi $|a| < 1$, ou $a = 1$ et $b = 0$, ou $u_0 = b/(1-a)$

2. Cas où f est continue.

Prop 4 : Si (u_n) est définie par $u_{n+h} = f(u_{n+h-1}, \dots, u_n)$, et si (u_n) converge vers ℓ, avec f continue au point $(\ell \dots \ell)$, alors on a $\ell = f(\ell \dots \ell)$.

Ex 5 : $u_{n+1} = u_n^2 - u_n - 3$. Si (u_n) converge, $\ell = -1$ ou 3.

Def 6 : (u_n) vérifie une reccurence homographique si $u_{n+1} = h(u_n)$ avec $h : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$.

Rq 7 : (u_n) est bien définie $\forall n$ ssi $u_n \neq -d/c$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Prop 8 : Soit (u_n) vérifiant une reccurence homographique $h(z) = z \Leftrightarrow cz^2 - (a-d)z - b = 0$. Selon le nombre de racines de ce polynôme, on a l'expression de (u_n) :
- deux racines α, β : $\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = \left(\frac{a - \alpha c}{a - \beta c}\right)^n \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$
- une racine double α : $\frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{u_0 - \alpha} + kn$

3. Monotonie des suites réelles reccurentes d'ordre 1.

Prop 9 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset I$. On considère (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.
- si f est croissante, (u_n) est monotone (de sens donné par $u_1 - u_0$)
- si f est décroissante, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de sens de monotonie opposés.

Ex 10 : $u_{n+1} = \sin(u_n)$, $u_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. (ELA)
(u_n) monotone et bornée donc elle converge vers l'unique point fixe de $x \mapsto \sin x$, 0.

Ex 11 : $u_{n+1} = (2 - \sqrt{u_n})^{-1}$, $u_0 > 0$. (Gou)
La monotonie de u_n est donnée par le signe de $g(x) = (2-\sqrt{x})^{-1} - x$. Selon les valeurs de u_0, la suite se comportera differement.

4. Reccurences linéaires à coeff. constants.

Def 12 : une suite (u_n) à valeurs complexes vérifie une reccurence d'ordre 2 si $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ $\forall n$.

Prop 13 : On associe à (u_n) l'équation caractéristique $x^2 - ax - b = 0$. Si elle possède deux racines distinctes, u_n s'écrit sous la forme $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ (avec r_1, r_2 les racines). Si elle n'en possède qu'une r, $u_n = (\lambda n + \mu) r^n$.

Rq 14 : λ et μ sont déterminés par $\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu, & u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2 \\ u_0 = \mu, & u_1 = (\lambda + \mu) r \end{cases}$

Ex 15 : suite de Fibonacci, définie par (ELA)
$F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ $\forall n \geq 0$.
On obtient le terme général $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Prop 16 : On peut généraliser (Gou) cette résolution à des reccurences linéaires d'ordre h (à coeff. constants) $u_n = \sum_{i=1}^{h} a_i u_{n-i}$. L'équation caractéristique est alors $x^h = \sum a_i x^{h-i}$ et en notant $r_1 \dots r_q$ ses racines, de multiplicité $\alpha_1 \dots \alpha_q$, on a $u_n = \sum_{i=1}^{q} P_i(n) r_i^n$ où P_i est un polynôme de degré au plus $\alpha_i - 1$.

Rq 17 : En posant $U_n = {}^t(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+h})$, l'équation s'écrit $U_{n+1} = AU_n$ (avec A matrice compagnon de l'éq. cara) et $U_n = A^n U_0$.

(ROU) ## II SUITES RECCURENTES ET POINT FIXE

1. Théorème du point fixe de Banach.

Thm 18 : Soit (E,d) un espace métrique complet et $f: E \to E$ contractante. Alors f admet un unique point fixe $a \in E$, qui peut s'obtenir comme limite d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $u_0 \in E$ quelconque.

C-Ex 19 : • E non complet : $E =]0,1[$, $f: x \mapsto x/2$ est contractante mais n'a pas de point fixe.

• f non contractante : $E = [0, 2\pi]$, $f: x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ f n'a pas de point fixe (pourtant $|f(x)-f(y)| < |x-y| \; \forall x,y$)

• hypothèses suffisantes mais pas nécessaires : $E = [0,2\pi]$, $f: x \mapsto \sin x$ admet un point fixe (origine 0) unique mais n'est pas contractante.

Rq 20 : En fait, si $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que f^p contractante, on a le même résultat sur f (variante du thm).

(DEM) Appli 21 : résolution d'une équation $f(x) = 0$. On pose $\varphi: x \mapsto x - Cf(x)$ avec C constante non nulle. Alors $\varphi(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0$, et il faut choisir C de manière à respecter les hypothèses du thm 18.

2. Classification des points fixes.

Def 22 : Soit $I \subset \mathbb{R}$, $\varphi: I \to I$ C^1 et $a \in I$ point fixe de φ.

• si $|\varphi'(a)| < 1$, a est un point fixe attractif de φ

• si $\varphi'(a) = 0$, a est un point fixe superattractif

• si $|\varphi'(a)| > 1$, a est un point fixe répulsif.

Rq 23 : dans le thm 18, le point fixe obtenu est attractif.

Prop 24 : • si a est attractif, $\forall x_0$ dans un voisinage de a $(x_p = f^p(x_0))_{p \geq 0}$ converge vers a de manière au moins exponentiellement rapide $|x_p - a| \leq k^p |x_0 - a|$

• si a est superattractif, le même résultat est vraie mais avec une vitesse de convergence beaucoup plus rapide (d'où le nom...)

• si a est répulsif, il va exister un voisinage I de a tel que $\forall x \in I$, $|\varphi(x) - a| > |x - a|$

Rq 25 : Le cas $|\varphi'(a)| = 1$ est douteux

→ $\varphi(x) = \sin x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ admet un point fixe attractif en 0

→ $\varphi(x) = \operatorname{sh} x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ admet un point fixe répulsif en 0

Def 26 : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi: \Omega \to \mathbb{R}^n$ et $c \in \Omega$ point fixe de φ, avec φ différentiable en c. On note ρ le rayon spectral.

• si $\rho(D\varphi(c)) < 1$, on dit que c est un point fixe attractif

• si $\rho(D\varphi(c)) = 0$, on dit que c est un point fixe super attractif.

III RESOLUTION APPROCHÉE D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On cherche des méthodes pour approximer l'unique solution $c = A^{-1}b$ du système linéaire $Ax = b$.

1. Méthodes itératives linéaires. (SSS)

Def 27 : On appelle décomposition régulière de A tout couple $(M,N) \in GL_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ tel que $A = M - N$. On lui associe la méthode itérative $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b \; \forall k \in \mathbb{N}$.

Rq 28 : Il faut choisir M facile à inverser (dans la mesure du possible).

Thm 29 : La méthode converge ssi $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Prop 30 : si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $A = M - N$, et si ${}^tM + N \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors la méthode converge.

* Méthode de Jacobi

$A = D - E - F$, avec $A = \begin{pmatrix} & -F \\ -E & \end{pmatrix}$ ($M = D$, $N = D - A = E + F$). La matrice d'itération associée à cette méthode est $B_J = D^{-1}(E+F) = I - D^{-1}A$

* Méthode de Gauss-Seidel

$A = D - E - F$, $M = D - E$, $N = F$, la matrice d'itération associée est $B_{GS} = (D-E)^{-1}F$

* Méthode de relaxation.

Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$. On fait la décomposition $M = \frac{1}{\omega}D - E$, $N = \frac{1-\omega}{\omega}D + F$

Rq 31 : pour $\omega = 1$, on retrouve Gauss-Seidel.

Thm 32 : • si A est à diagonale strictement dominante les méthodes de Gauss-Seidel et de Jacobi convergent
• la méthode de relaxation diverge si $\omega \leq 0$ ou $\omega \geq 2$ et, pour $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, elle converge si $0 < \omega \leq 1$.

[HU] et [XE3]

2. Méthode du gradient à pas optimal

Thm 33 : Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Alors la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ admet un unique minimum sur $\mathbb{R}^n$ caractérisé par $\nabla f(\bar{x}) = 0$. De plus, l'algorithme $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = x_k + t_k d_k \ \forall k \in \mathbb{N} \end{cases}$ (avec $d_k = -\nabla f(x_k)$ et t_k minimisent $t \mapsto f(x_k + t d_k)$) converge vers $\bar{x}$. $\boxed{\text{DVPT 1}}$

Rq 34 : cette méthode permet d'approcher la solution c de $Ax = b$ et en notant $C(A)$ le conditionnement de A et λ_n sa plus grande valeur propre, on connaît même la vitesse de convergence :
$$\|x_k - c\| \leq \left(\frac{2}{\lambda_n}(f(x_0) - f(c))\right)^{1/2} \left(\frac{C(A)-1}{C(A)+1}\right)^k.$$

IV - MÉTHODES DE RÉSOLUTION APPROCHÉE D'ÉQUATIONS NON LINÉAIRES.

[QSS]

1. Dichotomie.

Thm 35 : (valeurs intermédiaires) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Si $f(a)f(b) < 0$, $\exists \alpha \in]a,b[$ tel que $f(\alpha) = 0$

Partant de $I_0 = [a,b]$, la méthode de dichotomie produit des intervalles $I_k = [a_k, b_k]$ avec $I_k \subset I_{k-1}$ et $f(a_k)f(b_k) < 0$. Plus précisément, on pose $a_0 = a$, $b_0 = b$, $x_0 = \frac{a+b}{2}$ et $\begin{cases} a_{k+1} = a_k,\ b_{k+1} = x_k & \text{si } f(x_k)f(a_k) < 0 \\ a_{k+1} = x_k,\ b_{k+1} = b_k & \text{si } f(x_k)f(b_k) < 0 \end{cases}$ et $x_{k+1} = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$

Prop 36 : La méthode s'arrête à la n-ième étape, quand $|x_n - \alpha| \leq |I_n| \leq \varepsilon$ (où ε est une tolérance fixée). Elle est convergente et $|x_k - \alpha| < \frac{b-a}{2^{k+1}}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Rq 37 : Cette méthode est lente, il s'agit donc de l'utiliser plutôt pour s'approcher de la racine, puis d'utiliser une méthode plus rapide pour obtenir une approximation précise (comme la méthode de Newton).

2. Méthodes de Newton [ROU]

D'après l'appli 21, on va transformer l'équation $f(x) = 0$ en un problème de point fixe $F(x) = x$, où $F(x) = x + \lambda(x)f(x)$ (λ ne s'annulant pas)

* Méthode de Newton

$x_{n+1} = F(x_n)$ converge très vite si le point fixe est super attractif. Ces considérations nous poussent à poser $\lambda(x) = -1/f'(x)$: $F(x) = x - f(x)/f'(x)$

Def 38 : méthode de Newton : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Thm 39 : Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ C^2 telle que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ et a l'unique zéro de f sur $[c,d]$. Alors :
i) $\exists C > 0$ tel que, si $|x_0 - a| < 1/C$, (x_n) est bien définie $\forall n \in \mathbb{N}$ et elle converge vers a à vitesse quadratique
ii) si $f'' > 0$ sur $[c,d]$, alors (x_n) est bien définie $\forall x_0 > a$ et on a l'équivalent : $x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$

$\boxed{\text{DVPT 2}}$

* Méthode de la sécante.

Rq 40 : Le calcul de f' est parfois trop compliqué pour la méthode de Newton. On remplace donc f' par le taux d'accroissement

Prop 41 : Si on a $x_0 < a < x_1$, on posera $x_{p+1} = x_p - \frac{f(x_p)}{\tau_p}$ où $\tau_p = \frac{f(x_p) - f(x_{p-1})}{x_p - x_{p-1}}$. Cette méthode converge (mais moins vite que celle de Newton).

* Méthode de Newton-Raphson

Généralisation de Newton pour $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

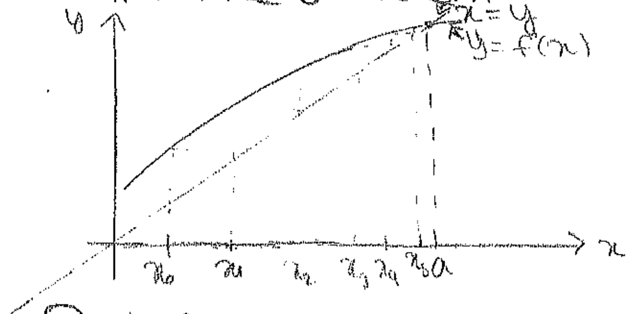
Thm 42 : on itère ici l'application $\varphi(x) = x - Df(x)^{-1} \cdot f(x)$.
Si f C^2 avec $f(a) = 0$ et $Df(a)$ inversible, alors a est un point fixe superattractif de φ.

[Gou] Gourdon Analyse. [QSS] Quateroni, Sacco, et Saleri
[ALA] EP Amiraari
[HU] Hiriart, Urruty
[Rou] Rouvière
[XE3] X-Ens Alg 3
[Dem] Demailly

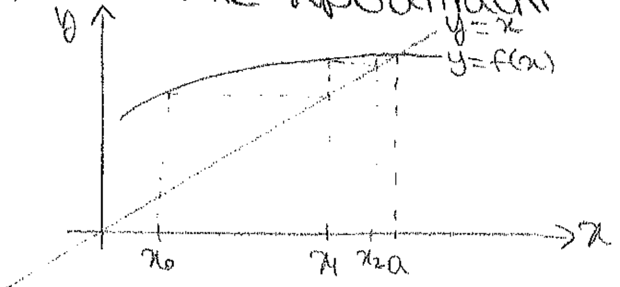
ANNEXE

II. 2.

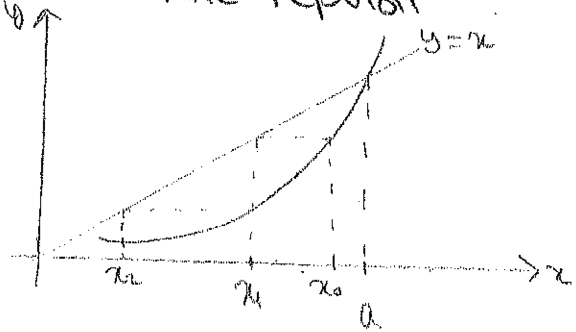
* Point fixe attractif



* Point fixe superattractif

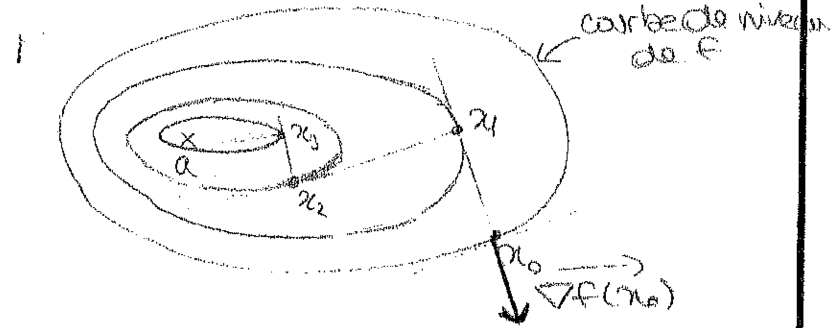


* Point fixe répulsif



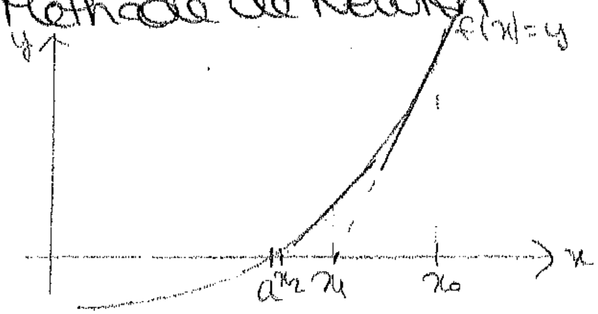
III - 2

Méthode du gradient à pas optimal

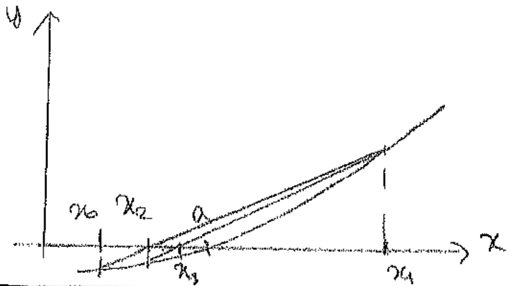


IV. 2

* Méthode de Newton



* Méthode de la sécante



1 Méthode de Newton

Théorème 1.1. *Soit $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 vérifiant $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c, d]$. Soit a l'unique zéro de f sur le segment $[c; d]$. On considère la fonction*

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad x \in [c; d].$$

Alors :

1. *Il existe $\alpha > 0$ tel que si I désigne l'intervalle $[a - \alpha, a + \alpha]$ alors I est stable par F, et la suite définie par*

$$x_0 \in I, \quad \forall n \geqslant 0 \quad x_{n+1} = F(x_n)$$

a une convergence d'ordre 2 vers a : il existe $c > 0$ tel que

$$\forall n \geqslant 0 \quad |x_{n+1} - a| \leqslant C|x_n - a|^2.$$

2. *Si $f'' > 0$ sur $[c, d]$ alors l'intervalle $I = [a; d]$ est stable par F, et pour tout $x_0 \in I$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante (ou constante) avec*

$$0 \leqslant x_{n+1} - a \leqslant C(x_n - a)^2, \quad \text{et} \quad x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2.$$

Remarque 1.2. Comme f vérifie $f(c) < 0 < f(d)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires f admet bien un zéro $a \in]c; d[$. De plus comme $f' > 0$ sur $[c; d]$, f est strictement croissante et ce zéro est bien unique.

Démonstration.
Etape 1 : Soit $x \in [c, d]$. Comme $f(a) = 0$ on a

$$\begin{aligned} F(x) - a &= x - a - \frac{f(x) - f(a)}{f'(x)} \\ &= \frac{f(a) - f(x) - (a - x)f'(x)}{f'(x)} \end{aligned}$$

D'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, il existe $z_x \in]a, x[$ (ou $]x, a[$) tel que

$$f(a) = f(x) + (a - x)f'(x) + \frac{(a - x)^2}{2}f''(z_x).$$

On en déduit :

$$F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z_x)}{f'(x)}(x - a)^2. \qquad (*)$$

Etape 2 : Montrons la première partie du théorème.

Posons $C = \dfrac{\max|f''|}{2\min|f'|}$. Le réel C est bien défini car f'' et f' sont continues sur le segment $[c, d]$, intervalle sur lequel $f' > 0$.
On a alors

$$\forall x \in [c; d] \quad |F(x) - a| \leqslant C|x - a|^2.$$

Soit $\alpha > 0$ assez petit pour avoir $I = [a - \alpha, a + \alpha] \subset [c, d]$ et $C\alpha < 1$. Alors,

$$\forall x \in I \quad |F(x) - a| \leqslant C\alpha^2 < \alpha.$$

Ainsi $F(I) \subset I$ ie I est stable par F.

On peut alors définir la suite (x_n) par $x_0 \in I$ et $x_{n+1} = F(x_n)$ pour tout $n \geqslant 0$. Cette suite vérifie

$$\forall n \geqslant 0 \quad |x_{n+1} - a| = |F(x_n) - a| \leqslant C|x_n - a|^2.$$

Et donc, par récurrence immédiate,

$$C|x_n - a| \leqslant (C|x_0 - a|)^{2^n} \leqslant \underbrace{(C\alpha)}_{<1}{}^{2^n},$$

d'où la convergence d'ordre 2 de (x_n) vers a.

Etape 3 : Montrons la deuxième partie du théorème.

On suppose désormais $f'' > 0$ sur $[c; d]$. Pour $x \in [a; d]$ on a $f'(x) > 0$ et $f(x) \geqslant 0$ donc

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leqslant x,$$

avec inégalité stricte si $x > a$. D'autre part, $f'' > 0$ sur $[c; d]$ donc $(*)$ donne $F(x) - a \geqslant 0$ pur tout $x \in [a; d]$ avec inégalité stricte si $x > a$. Ainsi, l'intervalle $I = [a, d]$ est stable par F.

De plus, si $x_0 \in]a, d]$ la suite $(x_n)_n$ des itérés est strictement décroissante. Si $x_0 = a$, la suite est constante. Dans les deux cas, la suite (x_n) admet une limite ℓ qui vérifie $F(l) = l$. Ainsi $f(\ell) = 0$, d'où $\ell = a$.

La convergence de (x_n) vers a est quadratique : on a comme précédemment

$$0 \leqslant x_{n+1} - a \leqslant C(x_n - a)^2.$$

Enfin, montrons que cette inégalité est optimale. Si $a < x_0 \leqslant d$, alors pour tout n on a $x_n > a$ et $(*)$ donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists z_n \in]a; x_n[\quad \frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(z_n)}{f'(x_n)}.$$

Par continuité de f' et f'' on en déduit $\dfrac{f''(z_n)}{f'(x_n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{f''(a)}{f'(a)}$, d'où l'équivalent souhaité.

□

2 Méthode du gradient à pas optimal.

Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, et $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n > 0$ les valeurs propres de A. On souhaite approcher l'unique solution $c = A^{-1}b$ du système linéaire $Ax = b$.

Proposition 2.1. *On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$. Alors :*

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla f(x) = Ax - b$.

2. Le vecteur c est l'unique élément de $\mathbb{R}^n$ qui minimise f.

Démonstration.
Montrons le premier point. Soient $x, h \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= \frac{1}{2}\langle A(x+h), x+h\rangle - \langle b, x+h\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle + \frac{1}{2}\langle Ax, h\rangle + \frac{1}{2}\langle Ah, x\rangle - \langle b, h\rangle + \frac{1}{2}\langle Ah, h\rangle \\
&= f(x) + \langle Ax - b, h\rangle + \frac{1}{2}\langle Ah, h\rangle \quad \text{car } A \text{ est symétrique} \\
&= f(x) + \langle Ax - b, h\rangle + o(\|h\|) \quad \text{quand } \|h\| \to 0
\end{aligned}$$

Ainsi, f est différentiable et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $\nabla f(x) = Ax - b$. Démontrons maintenant le second point. Soit $\bar{x}$ un élément qui minimise f. Alors nécessairement $\nabla f(\bar{x}) = 0$ donc $\bar{x}$ est solution du système linéaire $Ax = b$ donc $\bar{x} = c$. Montrons que c minimise effectivement f. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq c$. On a

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(c + (x - c)) \\
&= f(c) + \langle Ac - b, x - c\rangle + \langle A(x-c), x - c\rangle \quad \text{d'après ce qui précède} \\
&= f(c) + \langle A(x-c), x - c\rangle \quad \text{car } Ax - b = 0 \\
&> f(c) \quad \text{car } A \text{ est symétrique définie positive et } x - c \neq 0,
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve.

□

Il s'agit désormais d'appliquer l'algorithme de minimisation du gradient à pas optimal à la fonction f : on définit la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = x_k + t_k d_k, \end{cases}$$

où $d_k = -\nabla f(x_k)$ et où t_k est l'unique réel minimisant la fonction $t \mapsto f(x_k + td_k)$.
On va montrer que la suite (x_k) ainsi définie converge vers c. Pour cela nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.2. *Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n > 0$ ses valeurs propres. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\|x\|^4 \leqslant \langle Ax, x\rangle\langle A^{-1}x, x\rangle \leqslant \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^2 \|x\|^4.$$

Démonstration. A est symétrique donc il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ orthonormale constituée de vecteurs propres de A. Notons $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Commençons par montrer l'inégalité de gauche. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}\langle Ax, x\rangle \langle A^{-1}x, x\rangle &= \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} x_i^2\right) \\ &\geqslant \left(\sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_i}} x_i^2\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_1^2\right)^2 = \|x\|^4.\end{aligned}$$

Passons à la majoration. Comme $\sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{2}(a+b)$ pour $a, b \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned}\sqrt{\langle Ax, x\rangle \langle A^{-1}x, x\rangle} &= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} x_i^2\right)} = \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_1}{\lambda_i} x_i^2\right)} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n} + \frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right) x_i^2\right).\end{aligned}$$

L' étude de la fonction $h : x \mapsto \frac{x}{\lambda_n} + \frac{\lambda_1}{x}$ sur l'intervalle $[\lambda_n; \lambda_1]$ montre que cette fonction est décroissante sur $[\lambda_n; \sqrt{\lambda_1 \lambda_n}]$ et croissante sur $[\sqrt{\lambda_1 \lambda_n}; \lambda_1]$. Elle admet donc un maximum en λ_1 ou λ_n. Comme $h(\lambda_1) = 1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_n} = h(\lambda_n)$ on en déduit que

$$\sqrt{\langle Ax, x\rangle \langle A^{-1}x, x\rangle} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\left(\left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)\sum_{i=1}^n x_i^2\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}} + \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}}\right)\|x\|^2.$$

On obtient l'inégalité souhaitée en élevant au carré. □

Théorème 2.3. *Notons* $\mathrm{C}(A) := \|A\|\|A^{-1}\| = \frac{\lambda_1}{\lambda_n}$ *le conditionnement de* A. *La suite* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *donnée par la méthode du gradient à pas optimal converge vers* c, *solution de* $Ax = b$. *Plus précisément, on a*

$$f(x_k) - f(c) \leqslant (f(x_0) - f(c))\left(\frac{\mathrm{C}(A) - 1}{\mathrm{C}(A) + 1}\right)^{2k},$$

et

$$\|x_k - c\| \leqslant \left(\frac{2(f(x_0) - f(c))}{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\mathrm{C}(A) - 1}{\mathrm{C}(A) + 1}\right)^k.$$

Démonstration.

- Calculons $f(c)$.
  On a
  $$f(c) = \frac{1}{2}\langle Ac, c\rangle - \langle b, c\rangle = -\frac{1}{2}\langle b, c\rangle.$$
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $d_k = 0$ alors on a $Ax_k = b$ et alors l'algorithme a convergé en temps fini et on n'a plus rien à dire. On suppose donc $d_k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

– Expression de t_k.
Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $g(t) := f(x_k + td_k)$. Alors

$$\begin{aligned} g(t) &= f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), td_k \rangle + \frac{1}{2}\langle Atd_k, td_k \rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle Ad_k, d_k \rangle t^2 - t\|d_k\|^2 + f(x_k). \end{aligned}$$

Comme A est définie positive et comme $d_k \neq 0$ pour tout k on en déduit que g est un polynôme du second degré. Ainsi, g atteint sont minimum en $t = t_k := \dfrac{\|d_k\|^2}{\langle Ad_k, d_k \rangle}$.

– Calculons l'erreur commise entre $f(x_k)$ et $f(c)$.

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}) &= f(x_k + t_k d_k) && \text{par définition de } x_{k+1} \\ &= f(x_k) - \frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k \rangle} + \frac{1}{2}\frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k \rangle} && \text{d'après le point précédent} \\ &= f(x_k) - \frac{1}{2}\frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k \rangle} \\ &= f(x_k) - \frac{1}{2}\frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k \rangle}\frac{\langle A^{-1}d_k, d_k \rangle}{\langle A^{-1}d_k, d_k \rangle} \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \langle A^{-1}d_k, d_k \rangle &= \langle A^{-1}(Ax_k - b), Ax_k - b \rangle \\ &= \langle x_k - c, Ax_k - b \rangle \\ &= \langle Ax_k, x_k \rangle - \langle x_k, b \rangle - \langle Ax_k, c \rangle + \langle b, c \rangle \\ &= 2(f(x_k) - f(c)) && \text{car } \langle Ax_k, c \rangle = \langle x_k, Ac \rangle = \langle x_k, b \rangle \end{aligned}$$

On a donc

$$f(x_{k+1}) - f(c) = (f(x_k) - f(c))\left(1 - \frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k \rangle \langle A^{-1}d_k, d_k \rangle}\right).$$

Comme $f(x_k) - f(c) \geqslant 0$, d'après l'inégalité de Kantorovitch, on a

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}) - f(c) &\leqslant (f(x_k) - f(c))\left(1 - 4\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^{-2}\right) \\ &\leqslant (f(x_k) - f(c))\left(1 - 4\left(\sqrt{\mathrm{C}(A)} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{C}(A)}}\right)^{-2}\right) \\ &\leqslant (f(x_k) - f(c))\left(1 - 4\frac{\mathrm{C}(A)}{(\mathrm{C}(A)+1)^2}\right) \\ &\leqslant (f(x_k) - f(c))\left(\frac{\mathrm{C}(A) - 1}{\mathrm{C}(A) + 1}\right)^2 \end{aligned}$$

Par récurrence on obtient alors

$$f(x_k) - f(c) \leqslant (f(x_0) - f(c))\left(\frac{\mathrm{C}(A) - 1}{\mathrm{C}(A) + 1}\right)^{2k}.$$

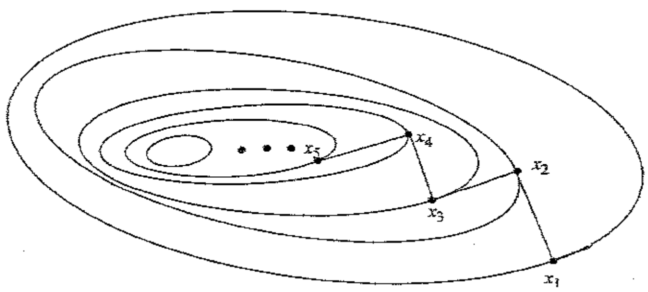


FIGURE 1 – Méthode du gradient à pas optimal.

– Pour finir, estimons l'erreur sur $\|x_k - c\|$.
Elle se déduit de l'inégalité précédente en remarquant que

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(c) &= \frac{1}{2}\langle A(x_k - c), x_k - c\rangle \quad \text{(cf démonstration de la proposition 2.1)} \\ &\geqslant \frac{\lambda_n}{2}\|x_k - c\|^2. \end{aligned}$$

□

Remarque 2.4. On a $d_{k+1} = -Ax_{k+1} + b = -Ax_k + b - t_k A d_k = d_k - t_k A d_k$, donc $\langle d_{k+1}, d_k\rangle = \|d_k\|^2 - t_k\langle Ad_k, d_k\rangle = 0$. Les directions de descente sont donc consécutivement orthogonales entre elles.