Continuité et dérivabilité des fonctions réelles de la variable réelle. Exemples et contre-exemples. I

I/ Généralités, confrontation des notions :

① Définitions :

Pour la suite, I désigne un intervalle d'extrémités $a < b$, avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.

[GOU] Déf. 1&2

Déf 1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$
- f est continue en a si : $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in I\ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
- f est dérivable en a si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in I}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe, on note cette dérivée $f'(a)$.
- f est continue sur $A \subset I$ (respectivement dérivable sur $A \subset I$) si elle est continue (respectivement dérivable) en tout point de A.

ex 2. $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ et $\mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ ne sont jamais continues.

Prop 3. Toute fonction dérivable en un point y est continue.

ex 4. $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Déf 5. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur $A \subset I$. La fonction $f' : A \to \mathbb{R},\ x \mapsto f'(x)$ est appelée dérivée de f. Si f' est continue sur A, on dit que f est de classe C^1 sur A.

ex 6. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \sin(1/x) \cdot x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas de classe C^1.

NB 7. Il existe des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, mais jamais dérivables, appelons Γ l'ensemble qu'elles constituent. [ROM] p79

Si φ est l'unique fonction 1-périodique qui coïncide avec $x \mapsto |x|$ sur $[-1/2 ; 1/2]$, alors $\left(x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi(2^n x)}{2^n}\right) \in \Gamma$ et de même [GOU] p84 et p401

$\left(x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(p^n x)}{2^n}\right) \in \Gamma$ pour $p \geq 6$.

De plus, l'ensemble des restrictions des éléments de Γ à $[0;1]$ est dense dans $(C^0([0;1]) ; \|.\|_\infty)$ (DEV 1)

② Propriétés générales.

Prop 8. $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in I$ ssi pour toute suite de réels $(a_n)_n$ convergeant vers a, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = f(a)$.

ex 9. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \cos 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ n'est pas continue en 0.

Prop 9. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et soit $K \subset I$ un compact (i.e. un fermé borné) de $\mathbb{R}$. $f(K)$ est compact.

[Gou] p 38 **Th 10.** $f(I)$ est un intervalle si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue.

[Gou] p 78 **Th 11.** (Darboux) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. Alors $f'(I)$ est un intervalle.

NB 12. La propriété des valeurs intermédiaires (Th 10) ne caractérise pas les fonctions dérivées. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \cos 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

alors f n'est pas une dérivée et, pour tout intervalle $J \neq \emptyset$, $f(J)$ est un intervalle.

II / Plus de régularité :

1) Uniforme continuité :

Def 13. $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur I si :
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall (x,y) \in I^2\ |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Def 14. $f : I \to \mathbb{R}$ est K-lipschitzienne (où $K > 0$) si : $\forall (x,y) \in I^2\ |f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$

Prop 15. • Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.
• Toute fonction uniformément continue est continue.

ex 16. $x \mapsto x$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
$x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne, mais est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
$x \mapsto x^2$ est continue, mais pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Prop 17. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue, et si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont des suites d'éléments de I telles que $u_n - v_n \to 0$, alors $f(u_n) - f(v_n) \to 0$.

ex 18. L'exponentielle n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Th 19. (Heine) Soient K un compact de $\mathbb{R}$ et $f : K \to \mathbb{R}$. Si f est continue, alors elle est uniformément continue.

Th 20. (Weierstrass) Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et soit $f : K \to \mathbb{R}$ continue. Il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|P - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

Th 21. Soit K un compact et soit $f : K \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\tilde{f} : K \to \mathbb{R}$, fonction en escalier telle que $\|f - \tilde{f}\|_\infty \leq \varepsilon$.

2) Dérivées d'ordres supérieurs :

Def 22. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ si f' est de classe $\mathcal{C}^k$. On note alors f''; $f^{(3)}$; ... $f^{(k+1)}$ les dérivées successives de f.
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on dit qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Th 23. (Rolle) Soient $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$ et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Il existe alors $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Th 24. (Taylor-Lagrange) Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et f de classe $\mathcal{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) sur $[a;b]$, avec $f^{(n)}$ dérivable sur $]a;b[$. Il existe alors $c \in]a;b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Th 25. (Borel) Soit $(a_n)_n$ une suite de réels. Il existe f, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $k \geq 0$ $f^{(k)}(0) = a_k$.
(DEV 2)

Ex 26. Toute fonction f définie sur $[a;b]$, et de classe $\mathcal{C}^\infty$, peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

III / Pourquoi la régularité ?

1 Stabilité des notions de régularité

Th 27. $(f_n)_n$ suite de fonctions continues de $I \to \mathbb{R}$ convergeant uniformément vers f. Alors f est continue.

Ex 28. $x \mapsto \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{\sin(nx)}{n}$ n'est pas continue donc il n'y a pas convergence uniforme.

Th 29. $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$ et $(f_n)_n$ suite de fonctions continues sur $[a;b]$ telle que $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$. Alors, si $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n$ et $F : x \mapsto \int_a^x f$, on a $F_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} F$

Th 30. $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$ et $\sum g_n$ une série de fonctions continues uniformément convergente. Alors :

$$\int_a^b \sum_{n \geq 0} g_n(t)\,dt = \sum_{n \geq 0} \int_a^b g_n(t)\,dt$$

Th 31. (Dini) $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$ et $(f_n)_n$ suite de fonctions croissantes sur $[a;b]$. Si $f_n \xrightarrow{CS} f$, alors $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ si f est continue.

Th 32. $(f_n)_n$ suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$. Si f_n' converge uniformément vers une fonction $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ et s'il existe $x_0 \in [a;b]$ tel que $(f_n(x_0))_n$ converge, alors il existe $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ et $f' = g$.

2 Propriétés topologiques

Th 33. L'ensemble des points de continuité d'une fonction dérivée est dense.

Ex 34. Il y a aussi des dérivées dont les points de discontinuité forment une partie dense : [GOU]
Si $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{r_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\varphi : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$, alors $x \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \varphi(x - r_n)$ est dérivable sur $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ et non dérivable sur $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

3 Convexité et régularité

[ROM]

Th 35. $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Alors f est continue sur $\mathring{I}$ et dérivable à droite et à gauche en tout point de $\mathring{I}$, de plus :
$x, y \in \mathring{I}$; $x \leq y \Rightarrow f_g'(x) \leq f_d'(x) \leq f_g'(y) \leq f_d'(y)$

Ex 36. $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{r_n\}_n$; $\Psi : t \mapsto \sum_{r_n \leq t} 1/2^n$

Alors $x \mapsto \int_0^x \Psi$ est convexe mais pas dérivable sur $\mathbb{Q} \cap [0,1]$

[GOU] X. Gourdon, Les maths en tête, Analyse, Ellipses
[ROM] J.-E. Rombaldi, Éléments d'Analyse réelle pour CAPES et agrég, EDP Sciences