228

CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ DES FONCTIONS RÉELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE. EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES.

## I - INTRODUCTION AUX NOTIONS DE CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ

$I$ désigne un ensemble de $\mathbb{R}$, $a$ un point de $I$, $f$ une fonction de $I$ dans $\mathbb{R}$.

### I.1. Fonctions continues [ROM]

Déf 1 : $f$ est continue en $a$ si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
i.e $\forall$ voisinage $V$ de $f(a)$, il existe un voisinage $U$ de $a$ tel que $f(U) \subset V$

Rem 2 : $f$ est continue en $a$ ssi $f$ admet un DL d'ordre 0 en $a$.

Déf 3 : $f$ est continue sur $I$ ssi $f$ est continue en tout point de $I$.

Ex 4 : • $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.
• $f : x \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} \text{ si } x = \frac{p}{q}, \ p \wedge q = 1 \end{cases}$ est continue exactement sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Prop 5 : L'ensemble des points de continuité d'une fonction est une intersection dénombrable d'ouverts.

Rem 6 : Il n'existe pas de fonction exactement continue sur $\mathbb{Q}$ car $\mathbb{Q}$ n'est pas un $G_\delta$.

Thm 7 (prolongement continu) Si $a$ est un point frontière de $I$ et que $f$ admet une limite en $a$, alors $\exists !$ prolongement de $f$ à $I \cup \{a\}$ continu en $a$ défini par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in I$, $\tilde{f}(a) = l$.

[ALL] Prop 8 • $f, g : I \to \mathbb{R}$ continues en $a \in I$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, $\alpha f$, $f+g$, $f \cdot g$, $f/g$ (si $g(a) \neq 0$) et $|f|$ sont continues en $a$.
• $g : J \subset \mathbb{R} \to I$ continue en $a \in J$, $f : I \to \mathbb{R}$ continue en $g(a)$, alors $f \circ g$ est continue en $a$.

Ex 9 : Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.

Thm 10 (valeurs intermédiaires) : Si $I$ intervalle et $f$ continue sur $I$ alors $f(I)$ est un intervalle.

[CHA] Contre-ex 11 $x \longmapsto \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ vérifie le TVI mais n'est pas continue en 0.

[ALL] Thm 12 $f : [a,b] \to [a,b]$ continue. Alors $\exists x \in [a,b] \,/\, f(x) = x$.

Déf 13 $f$ est uniformément continue si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \,/\, ((x,y) \in I^2, \ |x-y| \leq \eta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

Prop 14 : continuité uniforme $\Rightarrow$ continuité

Contre-ex 15 : $x \mapsto x^2$ est continue mais n'est pas uniformément continue

Thm 16 (Heine) Si $K \subset\subset \mathbb{R}$, alors $f : K \to \mathbb{R}$ continue est uniformément continue

### I.2. Fonctions dérivables

Déf 17 : $f$ est dérivable en $a$ si $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe. On la note alors $f'(a)$, nombre dérivé de $f$ en $a$. [GOU]

Rem 18 $f$ dérivable en $a$ ssi $f$ admet un DL d'ordre 1 en $a$.

Prop 19 $f$ dérivable en $a \Rightarrow f$ continue en $a$. [GOU]

Déf 20 Sur l'ensemble des points où $f$ est dérivable, on peut définir $x \mapsto f'(x)$, fonction dérivée de $f$. [GOU]

Rem 21 . Il existe des fonctions continues nulle part dérivables : [HAU]
ex : $g : x \mapsto |x|$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, 1-périodique ; $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(4^n x)}{4^n} \end{array}$ est continue sur $\mathbb{R}$, nulle part dérivable.
• Une fonction dérivée n'est pas nécessairement continue :
ex : $x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin(1/x) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

Prop 22 : L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ nulle part dérivables est dense dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ DVPT [GOU]

Prop 23 $f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivables en $a \in I$. Alors : [ALL]
→ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha f$ dérivable en $a$, $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$
→ $f+g$ dérivable en $a$, $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
→ $f \cdot g$ dérivable en $a$, $(f \cdot g)'(a) = f'(a) g(a) + f(a) g'(a)$
→ si $g(a) \neq 0$, $f/g$ dérivable en $a$, $(f/g)'(a) = \frac{f'(a) g(a) - f(a) g'(a)}{g(a)^2}$
• $g : J \subset \mathbb{R} \to I$ dérivable en $a \in J$, $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en $g(a)$, alors $f \circ g$ dérivable en $a$ et $(f \circ g)'(a) = g'(a) \cdot f'(g(a))$

Prop 24 $I$ un intervalle. Si $f$ est continue strict. monotone, dérivable en $a$, alors $f^{-1}$ est dérivable en $f(a)$ ssi $f'(a) \neq 0$ et $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$ [ROM]

Ex 25 : $\arcsin'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, $x \in ]-1,1[$

Prop 26 : Si $a$ extremum local de $f$, continue dérivable, alors $f'(a) = 0$

Contre-ex 27 $x \mapsto x^3$, la dérivée s'annule en 0 qui n'est pas un extremum local.

[ROM] ### I.3. Dérivées d'ordre supérieur, ensembles $\mathcal{C}^k$

Déf 28 On note $f^{(0)} = f$. Si pour $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ définie, dérivable, on pose $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$

[HAU] Rem 29 $x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ admet un DL à l'ordre 2 en 0 mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Déf 30 On dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, sur I si elle est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ continue sur I.
Si $\forall k \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$, alors $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.

Ex 31 Les fonctions polynômes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Prop 32 (Formule de Leibniz) Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont n fois dérivables, alors $f.g$ n fois dérivable et : $(fg)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

## II - RÉSULTATS FONDAMENTAUX

On considère ici des fonctions de $[a,b] \to \mathbb{R}$, continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$, $a \neq b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

### II.1. Théorème de Rolle

[ALL] Thm 33 (Rolle) Si $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in ]a,b[ \ / \ f'(c) = 0$

Contre-ex 34 $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{it} \end{array}$ ne vérifie pas le thm de Rolle.

[ROM] Prop 35 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. P scindé $\Rightarrow$ P' scindé

[ROM] Thm 36 (Darboux) $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I, intervalle. Alors $f'$ vérifie le TVI.

[ROM] Thm 37 (accroissements finis) $\exists c \in ]a,b[ \ / \ f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

[GOU] Prop 38 $f$ est croissante ssi $f' \geq 0$ sur $]a,b[$
. décroissante ssi $f' \leq 0$ sur $]a,b[$

Rmq 39 $f' > 0 \Rightarrow f$ strict. croissante, la réciproque est fausse
contre-ex : $x \mapsto x^3$.

[ALL] Prop 40 Si $f' \neq 0$ sur $]a,b[$, alors $f$ strict. monotone sur $[a,b]$

[ROM] Prop 41 Si $f$ dérivable sur $]a,b[ \setminus \{c\}$, $c \in ]a,b[$, si $f'$ admet une limite $\ell$ en c, alors $f$ dérivable en c et $f'(c) = \ell$.

Ex 42 : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Thm 43 (Inégalité des accroissements finis) $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle, continue sur I, dérivable sur $\mathring{I}$. Si $f'$ bornée sur $\mathring{I}$, alors $f$ lipschitzienne sur I. [ROM]

Thm 44 (accroissements finis généralisé) $f, g$ continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$. Alors, $\exists c \in ]a,b[$ tel que : [GOU]
$$(f(b) - f(a)) g'(c) = (g(b) - g(a)) f'(c)$$

Prop 45 (Règle de l'Hospital) Si $f(a) = g(a) = 0$ et si $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe [GOU]
alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Ex 46 $\lim\limits_{x \to 0} \sin x / x = 1$

Contre-ex 47 : $f : \begin{array}{l} ]0,+\infty[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x^2) \end{array}$ , $g : \begin{array}{l} ]0,+\infty[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{array}$

### II.2. Les formules de Taylor [ROM]

Thm 48 (Formule de Taylor-Lagrange) On suppose de plus $f \in \mathcal{C}^n([a,b], \mathbb{R})$ n+1 fois dérivable sur $]a,b[$. Alors $\exists c \in ]a,b[$ tel que :
$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Thm 49 (Formule de Taylor-Young) Soit $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle, $a \in \mathring{I}$. Si $f$ dérivable à l'ordre $n \geq 1$ en a, alors elle admet un DL d'ordre n au voisinage de a :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Ex 50 $x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ admet une série de Taylor nulle au voisinage de 0.

Thm 51 (Inégalité de Kolmogorov) Si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f$ et $f''$ bornées. Alors $f'$ est bornée sur $\mathbb{R}$ : $\|f'\|_\infty \leq \sqrt{2 \|f\|_\infty \|f''\|_\infty}$

Prop 52 Si $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$ alors $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$

Thm 53 (Formule de Taylor avec reste intégral) Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b], \mathbb{R})$ :
$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n\,dt.$$

Thm 54 (Bernstein) Si $f \in \mathcal{C}^\infty(]-a,a[, \mathbb{R})$, $a > 0$ et $\forall x \in ]a,a[$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x) \geq 0$, alors $f$ est DSE sur $]-a,a[$.

## III. ETUDE DE LA CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ DE CERTAINES CLASSES DE FONCTIONS

### III.1. Cas des fonctions monotones

[ROM] Prop 55 : L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est au plus dénombrable.

[ALL] Ex 56 : $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0,1]$ bijective.
$f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n \in A_x} 1/2^n$ où $A_x = \{n \in \mathbb{N} / \varphi(n) \leq x\}$

$f$ est strict. croissante sur $[0,1]$ et discontinue sur $\mathbb{Q} \cap ]0,1[$.

[ALL] Prop 57 $I$ un intervalle. $f : I \to \mathbb{R}$ monotone est continue ssi $f(I)$ intervalle.

[ALL] Prop 58 Une fonction dérivée monotone est continue.

Prop 59 (admis) Une fonction continue monotone est dérivable p.p.

### III.2. Cas des fonctions convexes

$I$ un intervalle.

[ALL] Prop 60 Si $f$ convexe sur $I$, alors $f$ continue sur $\mathring{I}$ et admet une dérivée à gauche et à droite en tout point de $\mathring{I}$.

Contre-ex 61 $[0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

[ROM] Prop 62 $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. $f$ convexe ssi $f'$ croissante sur $I$.

[ROM] Cor. 63 . $f : I \to \mathbb{R}$ convexe dérivable $\Rightarrow f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$
. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, $f$ convexe ssi $f'' \geq 0$

Ex 64 $x \mapsto \exp(x)$ est convexe.

### III.3. Cas des fonctions lipschitziennes

Prop 65 Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Contre-ex 66 $[0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ uniformément continue, non lipschitzienne.

Prop 67 $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable, $f$ lipschitzienne $\Leftrightarrow f'$ bornée.

Prop 68 Une fonction lipschitzienne est dérivable presque partout.

### [GOU] III.4. Cas des suites et séries de fonctions

Thm 69 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions continues en $x_0$ tq $f_n \xrightarrow{CVU} f$, alors $f$ est continue en $x_0$

Rmq 70 On a le même résultat pour les séries de fonctions

Thm 71 (Dini) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions continues, $f_n \underset{cvs}{\nearrow} f \Rightarrow f_n \xrightarrow[cvu]{} f$ [ALL]

Thm 72 (limite simple de Baire) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$, $f_n \xrightarrow{CVS} f \Rightarrow f$ continue sur un ensemble dense de $\mathbb{R}$.

Cor. 73 Une fonction dérivée est continue sur un ensemble dense.

Thm 74 (Weierstrass) Toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue est limite uniforme d'une suite de polynômes.

App 75 : Thm taubérien fort Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $a_n = O(1/n)$.
On suppose $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ a un rayon de cv $\geq 1$ et que sa somme $F$ vérifie $\lim_{x \to 1^-} F(x) = \ell < \infty$. Alors $\sum_{n \geq 0} a_n$ cv et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \ell$ DVPT

Thm 76 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. Si : . $\exists x_0 \in [a,b] / (f_n(x_0))$ CVU
. $(f_n')$ cvu sur $[a,b]$ vers $g$.
Alors, $(f_n)$ cvu sur $[a,b]$ vers $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$ et $f' = g$.

Ex 77 $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, \infty[$.

### III.5. Cas des intégrales dépendant d'un paramètre [Z-Q]

$I$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $(X, \mu)$ mesuré, $f : I \times X \to \mathbb{R}$.

Thm 78 Si : (i) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(t,x)$ mesurable
(ii) $\forall x \in X$, $t \mapsto f(t,x)$ continue en $t_0 \in I$.
(iii) $\exists g \geq 0 \in L^1$, $\forall t \in I$, $|f(t,x)| \leq g(x)$ PP.
Alors $F : t \mapsto \int_X f(t,x) \, d\mu(x)$ est continue en $t_0$.

Thm 79 Si : (i) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(t,x)$ intégrable
(ii) $\forall x \in X$, $t \mapsto f(t,x)$ dérivable sur $I$
(iii) $\forall K \subset\subset I$, $\exists g \in L^1 \geq 0$ tq $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$
Alors $F : t \mapsto \int_X f(t,x) \, d\mu(x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et $F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) \, d\mu(x)$

Ex 80 $\Gamma : x \mapsto \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \, dt$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$

[ALL] : Kada ALLAB, Éléments d'analyse, Ellipses
[GOU] : Xavier GOURDON, Analyse, Ellipses
[HAU] : Bertrand HAUCHECORNE, Les contre-exemples en mathématiques, Ellipses, 2ème édition
[ROM] : Jean-Etienne ROMBALDI, Éléments d'analyse réelle, EDP sciences
[Z-Q] : Claude ZUILY, Hervé QUEFFÉLEC, Éléments d'analyse pour l'agrégation, Masson