228 — CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ DES FONCTIONS RÉELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE. EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES

[GOU] p224 — [ROM] p37

I Définitions et premières propriétés

1) Continuité

Soit $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ pour a, b dans $\overline{\mathbb{R}}$

Déf 1: • On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue au point $x_0 \in I$ si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, ie

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

- f est continue sur I si f est continue en tout point de I
- On note $C^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I

Ex 2:
- Les fonctions constantes sont continues sur $\mathbb{R}$
- $x \mapsto E(x)$ (partie entière) est continue sur $]n, n+1[$
- $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$, mais continue sur $\mathbb{Q}$

Prop 3: Pour $f, g \in C^0(I)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, les fonctions suivantes sont continues:
$f + \lambda g$; fg ; $\frac{f}{g}$ (quand g ne s'annule pas) ; $f \circ h$ pour $h \in C^0(J)$ et $h(J) \subset I$.

Ex 4: Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$

p47 **Déf 5:** On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue si:
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall (x,y) \in I^2 \quad |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Ex 6: $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$

Prop 7: L'uniforme continuité implique la continuité

Ctre-ex 8: $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue

p51 **Thm 9 (HEINE):** Toute fonction continue sur un compact de $\mathbb{R}$ y est uniformément continue

Thm 10 (WEIERSTRASS): L'ensemble des fonctions polynômes définies de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est dense dans l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$, pour la norme uniforme.
DVP

[ROM] p47

2) Dérivabilité

Déf 11: $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathring{I}$ si la fonction $\tau_a f : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ définie sur $I \setminus \{a\}$ admet une limite finie en a, noté $f'(a)$.

Prop 12: f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1

Ex 13: • $f : x \mapsto x^2 \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ dérivable en 0, mais discontinue sur $\mathbb{R}^*$ — [AHU] p156

Prop 14: Une fonction dérivable en a est continue en a

Ctre-ex 15: Fonction de Van der Waerden, définie par:
$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)$ où $\varphi(x) = |x|$ sur $[-1,1]$, de période 2
est continue sur $\mathbb{R}$ mais dérivable en aucun point

[RCH] p78 — éventuel dvpt si l'autre dvpt n'est pas th 40.

Rmq 16: La dérivée d'une fonction n'est pas forcément continue:
$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^*}(x)$ dont la dérivée n'est pas continue en 0

Prop 17: Soit f, g de I dans $\mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathring{I}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a:
- $(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a)$
- $(fg)'(a) = f'(a) g(a) + f(a) g'(a)$
- $(f/g)'(a) = \frac{1}{g^2(a)} [f'(a) g(a) - f(a) g'(a)]$
- Si h est dérivable en $f(a)$, $(h \circ f)'(a) = (h' \circ f)(a) \times f'(a)$

Thm 18: Soit $f : I \to J$ bijection dérivable en $a \in I$ telle que $f'(a) \neq 0$
Alors f^{-1} est dérivable en $f(a) = y_0$ et $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

Ex 19: $\sin :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to]-1, 1[$ avec $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Déf 20: • On dit que f est C^1 si elle est dérivable et f' continue
- Par récurrence, on peut ainsi définir C^n des fonctions n fois dérivable dont la dérivée n^e est continue.
- On note $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ et $f^{(0)} = f$

p82 **Thm 21: (LEIBNIZ)**
Si f et g sont n fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$, alors fg aussi: et
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Th de Darboux (Chambert-Loir II et III).
↳ Une fonction dérivée vérifie tjrs le TVI, sans éventuellement être continue : $x^2\sin(\frac{1}{x})$ $f'(0)=0$, $f'(x)=2x\sin(\frac{1}{x})-\cos(\frac{1}{x})$, $x\neq 0$. f' vérifie le TVI par Darboux.

2

II Quelques grands énoncés

1) Autour du théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

[ROM] p56

Thm 22: I intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, $f\in C^0(I)$. Alors $f(I)$ est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Plus généralement, f(intervalle) est un intervalle.

Ctre-ex 23: $f=\mathbb{1}_{[0,1]}+2\mathbb{1}_{]1,2]}$ est continue sur $[0,2]\setminus\{1\}$
Mais $f(I)=\{1,2\}$

Corollaire 24 : TVI
Soit $I=[a,b]$, $a<b$ et $f\in C^0(I)$ telle que $f(a)f(b)<0$. Alors $f(x)=0$ admet une solution α dans $[a,b]$

p58

Ctre-ex 25: $f: x\mapsto \mathbb{1}_{\{0\}}(x)+\sin(\frac{1}{x})\mathbb{1}_{\mathbb{R}^*}(x)$ est discontinue en 0 mais vérifie $[f(a),f(b)]\subset f([a,b])$ $\forall a,b\in\mathbb{R}^*$
(propriété des valeurs intermédiaires)

2) Théorème de Rolle et conséquences

[GOU] p71

Prop 26: Soit $I=[a,b]$ segment non réduit à un singleton, et $f: I\to\mathbb{R}$ dérivable en $x_0\in \mathring{I}$ telle que x_0 est un extremum local. Alors $f'(x_0)=0$

Thm 27: (ROLLE) Soit $f:[a,b]=I\to\mathbb{R}$ continue sur I, dérivable sur $\mathring{I}$ avec $f(a)=f(b)$. Alors : $\exists c\in]a,b[$ tq $f'(c)=0$

Thm 28: (DES ACCROISSEMENT FINIS)
Soit $f:[a,b]=I\to\mathbb{R}$ continue, dérivable sur $\mathring{I}$. Alors :
$\exists c\in]a,b[$ tq $f'(c)=\dfrac{f(a)-f(b)}{b-a}$

Contre-ex 29: Ces théorèmes sont faux en dimension supérieure :
$f: \begin{array}{l}[0,2\pi]\to\mathbb{C}\\ t\mapsto e^{it}\end{array}$ vérifie $f(0)=f(2\pi)=1$ mais $f'(t)=ie^{it}\neq 0$ $\forall t$

Cor 30: Soit $f\in C^0([a,b])$, dérivable sur $]a,b[$. Alors f est
- croissante ssi $f'(x)\geq 0$ $\forall x\in]a,b[$
- constante ssi $f(x)=0$ $\forall x\in]a,b[$

[HAU] p170

Ctre-ex 31: $f: x\mapsto -\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ est telle que $f'(x)=\frac{1}{x^2}>0$ sur $\mathbb{R}^*$ mais $f(1)=-1<f(-1)=1$ ie f n'est pas croissante $\mathbb{R}^*$

[GOU] p73

Thm 32: (FORMULE de TAYLOR-LAGRANGE)
Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe C^n sur $[a,b]$ tq $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$.
Alors il existe c dans $]a,b[$ tel que :
$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\dots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\underbrace{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)}_{\text{reste de Lagrange}}$$

p74

Thm 33: (INÉGALITÉ des ACCROISSEMENTS FINIS)
Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Soit $M>0$ tq $|f'(x)|\leq M$ $\forall x\in]a,b[$. Alors
$$|f(b)-f(a)|\leq M.|b-a|$$

3) Suite de fonctions

[GOU] p220

Def 34: Soit $f_n: I\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$. On dit que :
- f_n converge simplement vers f si : $\forall x\in I$ $f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$
- f_n converge uniformément vers f si : $\sup_I |f_n-f|\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

[HAU] p236

Rmq 35: La converge uniforme entraine la convergence simple.
↳ $f_n(x)=\dfrac{1}{1+(x-n)^2}$ converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}$ mais $\sup_{\mathbb{R}}|f_n|\geq 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$ donc $\sup_{\mathbb{R}}|f_n|\not\to 0$

[GOU] p222

Thm 36: Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues tq $f_n\to f$ uniformément. Alors f est continue

Ctre-ex 37: $f_n: \begin{array}{l}[0,1]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^n\end{array}$ converge simplement vers $f=\mathbb{1}_{\{1\}}$ qui n'est pas continue (car $\sup_{[0,1]}|f_n-f|=1\not\to 0$)

[GOU] p228

Thm 38: (DINI) (sorte de réciproque) Soit I intervalle fermé borné
Soit $(f_n)_n$ suite croissante de fonctions continues tq $f_n\to f$ simplement avec $f\in C^0$. Alors la converge est uniforme

Thm 39: Soit $(f_n)_n\subset C^1([a,b])$ telle que : $\exists x_0\in[a,b]$ avec $f_n(x_0)$ converge et $(f_n')\to g$ uniformément sur $[a,b]$. Alors $(f_n)_n\to f$ uniformément sur $[a,b]$ avec $f\in C^1$ et $f'=g$

[Z-Q] p270

Thm 40 : DVP
Toute fonction continue de $C^0([0,1])$ est limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ nulle part dérivable

Éventuellement Darboux
Fonctions monotones.

Avec quel ensemble $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est-il en bijection?
(Avez) $\mathbb{R}$. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ C^0 est définie par ses valeurs sur $\mathbb{Q}$.

III Etude de cas particuliers

1) Convexité

[GOU] p94

Def 41: $f: I \to \mathbb{R}$ est convexe si :
$\forall a,b \in I$; $\forall \lambda \in [0,1]$ $\quad f(\lambda a+(1-\lambda)b) \leq \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$

Prop 42: f est convexe ssi
$\forall x_0 \in I$, $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est croissante

Ex 43: $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$

Prop 44: Une fonction convexe sur I est continue sur $\mathring{I}$ et admet une dérivée à gauche et à droite partout sur $\mathring{I}$.

[HAU] p138

Ctre-ex 45: $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$ convexe sur $\mathbb{R}_+$ mais discontinue en 0.

Thm 46:
- $f: I \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors f convexe ssi f' croissante
- $f: I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Alors f convexe ssi $f'' \geq 0$

2) Fonctions Lipschitziennes

[ROM] p48

Def 47: $f: I \to \mathbb{R}$ est Lipschitzienne si :
$\exists \lambda>0$ tq $\forall x,y \in I$ $\quad |f(x)-f(y)| \leq \lambda |x-y|$

[HAU] p145

Prop 48: Si f Lipschitzienne alors f est uniformément continue

Ctre-ex 49: $x \mapsto \sqrt{x}$ uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ mais non lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$

Cor 50: $f: I \to \mathbb{R}$ dérivable avec f' bornée, alors f est uniformément continue

3) Equicontinuité

[Z-Q] p151

Def 51: Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ où I intervalle fermé borné. On dit que $\mathcal{A}$ est équicontinue si:
$\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$ $\forall x,y \in I$ $\quad |x-y|<\delta \Rightarrow \forall f \in \mathcal{A}$ $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Thm 52: (ASCOLI)
Soit $A \subset \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, I fermé borné. Alors
$\begin{cases} A \text{ équicontinue} \\ A \text{ bornée pour } \|\ \|_\infty \end{cases}$ ssi A relativement compacte (pour $\|\ \|_\infty$)

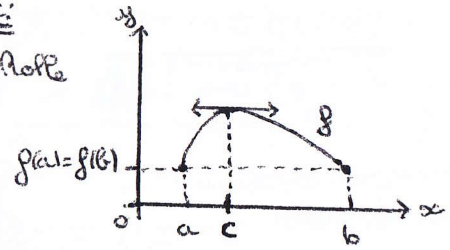
Ex 53: Si les fonctions de A sont Lipschitzienne de même constante, alors A est équicontinue.

[Z-Q] p359

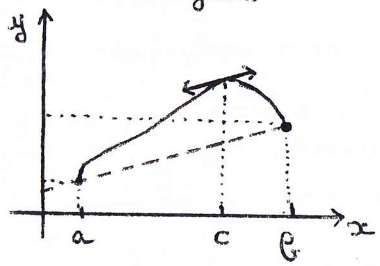
Application 54:
Thm de ARZELA-PEANO:
Soit a,b réels positifs, et $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. On définit
$$Q = \{(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid |t-t_0| \leq a \text{ et } |x-x_0| \leq b\}$$
Soit f continue sur Q et $M>0$ telle que $\sup_Q |f| < M$
Alors le problème : $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$
admet une solution (x, J) où $J=[t_0-T, t_0+T]$ avec $T=\min\left(a, \frac{b}{M}\right)$. Cette solution n'est pas forcément unique.

ANNEXE:

- Thm de Rolle



- Thm des accroissements finis



Références:

[GOU] : Xavier GOURDON, Analyse 2e edition, Ellipses

[HAU] : Bertrand HAUCHECORNE, Les contres-exemples en mathematiques, Ellipses

[ROM] : Jean-Etienne ROMBALDI, Elements d'analyse réelle, EDP sciences

[Z-Q] : Zuily - Queffélec, Analyse pour l'agregation, Dunod

Densité des fonctions continues nulle part dérivables

Joubaud Maud et Jochault Bastien

15 Octobre 2014

Théorème. *L'ensemble A des fonctions continues sur $[0,1]$ qui ne sont dérivables en aucun point de $[0,1]$ est dense dans $(C^0([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$.*

Preuve.
Pour montrer ce résultat de densité on utilisera le lemme de Baire sous sa version ouverte :
Soit X un Banach avec $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X^{\mathbb{N}}$ tel que, pour tout n :
- *X_n est un ouvert.*
- *X_n est dense dans X.*

Alors on a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est dense dans X.

Comme $(C^0([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$ est complet on peut utiliser ce résultat.
Ainsi pour montrer la densité de A (l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables sur $[0,1]$) il suffit d'exhiber une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^0([0,1],\mathbb{R})$ qui vérifie les hypothèses précédentes avec $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n \subset A$.

De manière équivalente, en passant au complémentaire, on va chercher une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec :
- $\forall n \in \mathbb{N}$ F_n est fermé.
- $\forall n \in \mathbb{N}$ F_n est d'intérieur vide.
- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \supset A^c$

Posons $F_n = \{f \in C^0([0,1],\mathbb{R}) \mid \exists x_0 \in [0,1] \ \ \forall y \in [0,1] \ \ |f(x_0) - f(y)| \leqslant n|x_0 - y|\}$

1ere étape : Montrons que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \supset A^c$.

Soit $f \in A^c$, comme f est dérivable en au moins un point on a :
$\exists x_0 \in [0,1] \;\; f'(x_0) \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall y \in [0,1] \;\; |\frac{f(x_0)-f(y)}{x_0-y}| \leqslant N$
$\Rightarrow f \in F_N$
On a donc $f \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

2eme étape : Montrons que F_n est fermé.

Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset F_n$ tel que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|\;\;\|_\infty)$ vers f.

1. $\forall k \in \mathbb{N} \;\; \exists x_k \in [0,1] \;\; \forall y \in [0,1] \;\; |f_k(x_k) - f_k(y)| \leqslant n|x_k - y|$
   Comme $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ avec $[0,1]$ compact, il existe une sous suite $(x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in [0,1]$.
2. Si on montre $\lim\limits_{i\to\infty} |f_{k_i}(x_{k_i}) - f_{k_i}(y)| = |f(x) - f(y)|$
   Alors on aura :
   $\exists x \in [0,1] \;\; \forall y[0,1] \;\; |f(x) - f(y)| \leqslant n|x-y|$
   et donc $f \in F_n$ ce qui assure que F_n est fermé.
   - On a d'abord clairement : $\forall y \in [0,1] \;\; \lim\limits_{i\to\infty} f_{k_i}(y) = f(y)$
   - Il nous reste seulement à montrer : $\lim\limits_{i\to\infty} f_{k_i}(x_{k_i}) = f(x)$

$$\begin{aligned} |f_{k_i}(x_{k_i}) - f\;\;(x)| &\leqslant |f_{k_i}(x_{k_i}) - f(x_{k_i})| + |f(x_{k_i}) - f(x)| \\ &\leqslant \|f_{k_i} - f\|_\infty + |f(x_{k_i}) - f(x)| \end{aligned}$$

   Or $\lim\limits_{i\to\infty} \|f_{k_i} - f\|_\infty = 0$ car f_{k_i} converge vers f dans $(C^0([0,1]),\mathbb{R}), \|\;\;\|_\infty)$, et $\lim\limits_{i\to\infty} |f(x_{k_i}) - f(x)| = 0$ par continuité de f.

3^{eme} étape : Montrons que $\overset{\circ}{F_n} = \emptyset$.

Comme on est dans un espace métrique, il suffit de montrer qu'il n'existe pas de boule ouverte $B(f, \epsilon) \subset F_n$ avec $f \in F_n$ et $\epsilon > 0$.
Le problème est équivalent à vérifier que :
$\forall f \in F_n \ \ \forall \epsilon > 0 \ \ B(f, \epsilon) \bigcap F_n^c \neq \emptyset$.
Fixons alors $\epsilon > 0$ et $f \in F_n$.

- Par le théorème de Weierstrass : $\exists P \in \mathbb{R}[X] \ \ \|P - f\|_\infty \leqslant \frac{\epsilon}{2}$.
  On note $M = \|P'\|_\infty$ (qui existe car P' est continue sur le compacte $[0, 1]$.
- Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > 2\frac{M+n+1}{\epsilon}$. On partition alors $[0, 1]$ en N intervalles de même longueur.
  On définit alors une fonction g_0 périodique sur $[0, 1]$ en la définissant sur $[0, \frac{1}{N}]$:
  $\forall x \in [0,1] \ \ g_0(x) = \begin{cases} \frac{\epsilon N}{2} x & \text{si } \ x \in [0, \frac{1}{2N}] \\ \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon N}{2} x & \text{si } \ x \in [\frac{1}{2N}, \frac{1}{N}] \end{cases}$
  Notons alors que $\|g_0\|_\infty = \frac{\epsilon}{4}$ et que g_0 est bien continue.
- On pose $g = P + g_0$

1. Vérifions que $g \in B(f, \epsilon)$

$$\begin{aligned} \|f - g\|_\infty = \|f - P - g_0\|_\infty &\leqslant \|f - P\|_\infty + \|g_0\|_\infty \\ &\leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

2. Il reste à montrer que $g \in F_n^c$.
   Rappelons que $F_n^c = \{f \in C^0([0,1]) \mid \forall x \in [0,1] \ \exists y_0 \in [0,1] \ |f(x) - f(y_0)| > n|x - y_0|\}$.
   On a : $\forall x, y \in [0,1] \ \ |g(x) - g(y)| \geqslant |g_0(x) - g_0(y)| - |P(x) - P(y)|$.
   On va alors minorer le premier terme et majorer le second :
   - Pour le premier terme, par le partitionnement de $[0, 1]$:
     $\exists k \in [\![0; 2(N-1)]\!]$ tel que $x \in [\frac{k}{2N}, \frac{k+1}{2N}]$
     Soit $y_0 \in [x, \frac{k+1}{2N}]$ alors on a :

$$\begin{aligned} |g_0(x) - g_0(y_0)| &= \frac{\epsilon N}{2} |x - y_0| \\ &> (M + n + 1)|x - y_0| \end{aligned}$$

   - Pour le second terme, on utilise le théorème des accroissement finis :
     $\forall x, y \in [0,1] \ \ \exists c \in [0,1] \ \ |P(x) - P(y)| = |P'(c)||x - y|$
     $|P(x) - P(y)| \leqslant M|x - y|$

   Mis bout à bout on obtient la minoration :
   $\forall x \in [0,1] \ \ \exists y_0 \in [0,1] \ \ |g(x) - g(y_0)| > n|x - y_0|$
   On a donc bien $g \in F_n^c$ ce qui termine la démonstration.

$\square$

Références

[1] Hervé QUEFFELEC, Claude ZUILY, *Analyse pour l'agrégation*, DUNOD : page 270 proposition I.13.

Théorème de Weierstrass

Joubaud Maud et Jochault Bastien

15 octobre 2014

A remettre éventuellement dans :
- 202, exemples de parties **denses** et applications
- 209, approximation d'une fonction par des **polynômes** et des polynômes trigonométriques. Exemples
- 228, **continuité** et dérivabilité de fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.
- 241, **suites** et séries **de fonctions**. Exemples et contre-exemples.

Théorème. *Toute fonction continue $F : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynômes.*

Preuve.
On va montrer le théorème pour $a = 0$ et $b = 1$; pour se ramener au cas général, il suffira de considérer $f(x) = F(a(1-x) + bx)$ pour $x \in I$ et $I = [0, 1]$.

Soit donc $\mathscr{C}$ l'ensemble des fonctions continue de I dans $\mathbb{C}$ et $f \in \mathscr{C}$. On va utiliser les polynômes d'approximation de BERNSTEIN :

pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$B_n(f) : I \to \mathbb{C}\ ,\quad x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) b_n^k(x) \qquad \text{avec } b_n^k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

On va montrer que la suite de polynôme $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I. On confond pour simplifier l'écriture $1, x, x^2$ avec les fonctions $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$.

1^{ere} étape : Calcul de $B_n(1), B_n(x), B_n(x^2)$

En utilisant la propriété du binôme de Newton, on introduit la fonction suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}, \qquad N(a, b) = (a + (1-b))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k (1-b)^{n-k}$$

avec $N(a, a) = 1$ pour tout a

Et on a donc :

. $B_n(1) = \sum_{k=0}^{n} 1 \times b_n^k(x) = N(x,x) = 1$

. $$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\, b_n^k(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k\ x^{k-1} x (1-x)^{n-k} = \frac{x}{n} \frac{\partial N}{\partial a}(x,x)$$
$$= \frac{x}{n}\, n (x + (1-x))^{n-1} = x$$

. $$\begin{aligned} B_n(x^2) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2}\, b_n^k(x) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2\ x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (k + k(k-1))\ x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{1}{n^2} \left[x \frac{\partial N}{\partial a}(x,x) + x^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)\ x^{k-2} (1-x)^{n-k} \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \left[nx + x^2 \frac{\partial^2 N}{\partial a^2}(x,x) \right] \\ &= \frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2} \frac{\partial^2 N}{\partial a^2}(x,x) = \frac{x(1-x)}{n} + x^2 \end{aligned}$$

<u>$2^{\text{ème}}$ étape</u> : Majorer quand on "s'éloigne" de x : $\displaystyle\sum_{\substack{0 \le k \le n \\ |k/n - x| \ge \eta}} b_n^k(x) \le \frac{1}{n\eta^2}$

On a d'une part

$$\begin{aligned} (*)\ :\ \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 b_n^k(x) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k^2}{n^2} - 2x\frac{k}{n} + x^2 \right) b_n^k(x) \\ &= B_n(x^2) - 2x B_n(x) + x^2 B_n(1) \\ &= \frac{x(1-x)}{n} \end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$(**)\ :\ \sum_{k, |k/n - x| \ge \eta} b_n^k(x) \le \frac{1}{\eta^2} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 b_n^k(x) = \frac{1}{n\eta^2} x(1-x) \le \frac{1}{n\eta^2}$$

On peut voir l'expression $B_n(f)\ (x) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n)\ b_n^k(x)$ comme un barycentre des points $\{f(k/n),\ 0 \le k \le n\}$ (car $\sum b_n^k(x) = 1$). De plus, les points les plus "lourds" (ie qui vont être les plus significatifs) sont ceux tels que $\frac{k}{n}$ est proche de x, d'après ($**$). Donc $B_n(f)\ (x) \approx f(x)$. On va formaliser cette approche :

3$^{\text{ème}}$ étape : Passer aux quantificateurs

Soit $\epsilon > 0$. Comme f est continue sur $I = [0,1]$ compact, elle y est uniformément continue (théorème de HEINE) et bornée. On a donc

$$\exists M > 0,\ |f(x)| \leq M \text{ sur } I \qquad \text{et } \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in I^2\ (|x-y| < \eta) \Rightarrow (|f(x)-f(y)| < \epsilon)$$

D'où, pour tout x dans I et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
|B_n(f)(x) - f(x)| &= |B_n(f)(x) - f(x)B_n(1)| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| b_n^k(x) \\
&\leq \epsilon \left(\sum_{k,|k/n-x|<\eta} b_n^k(x) \right) + 2M \left(\sum_{k,|k/n-x|>\eta} b_n^k(x) \right) \\
&\leq \epsilon \left(\sum_{k=0}^{n} b_n^k(x) \right) + \frac{2M}{n\eta^2} \leq \epsilon + \frac{2M}{n\eta^2}
\end{aligned}$$

On choisit donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{2M}{N\eta^2} \leq \epsilon$ et donc :

$$\forall n \geq N,\ \forall x \in I, \qquad |B_n(f)(x) - f(x)| < 2\epsilon$$

et ainsi, la suite de polynômes $(B_n(f))_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$, ce qui montre le théorème de WEIERSTRASS

□

Références

[1] Xavier GOURDON *Analyse 2ème édition*, Ellipses, 2008 : page 231, exercice 8