228

Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

Cadre : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω un sous-ensemble de $\mathbb{C}$.

I/ Notions générales de continuité et dérivabilités.

1) Définitions élémentaires

Def 1 (continuité). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit qu'elle est continue en $a \in I$, si pour tout voisinage V de $f(a)$, il existe un voisinage W de a tel que $f(W) \subset V$.

Ex 2 : Les polynômes sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

C-ex 3 : $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue sur aucun point de $\mathbb{R}$.

$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 1/q \text{ si } x = p/q \text{ avec } p \wedge q = 1 \end{cases} \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{Q}$.

Déf 4 : (dérivabilité) Une fonction $f : I \to \Omega$ est dite dérivable en $a \in I$ si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe. On note alors $f'(a)$, nombre dérivé de f en a.

Ex 5 : $x \mapsto \cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto \sin(x)$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto n x^{n-1}$

C-ex 6 : $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

Prop 7 : Une fonction $f : I \to \Omega$ est continue en $a \in I$ ssi pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$ on a $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(a)$

Prop 8 : Une fonction $f : I \to \Omega$ est dérivable en $a \in I$ ssi f admet un DL d'ordre 1 en a.

Prop 9 : Si $f : I \to \Omega$ est dérivable en a, alors f est continue en a.

Rem 10 : La réciproque est fausse $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x \sin(1/x)$ est continue mais pas dérivable en 0.

Déf 11 : L'ensemble $\mathcal{C}^0$ est l'ensemble des fonctions continues. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathcal{C}^k$ est l'ensemble des fonctions k fois dérivables et dont la dérivée $k$ième est continue. On note $\mathcal{C}^\infty = \bigcap_{k \geq 1} \mathcal{C}^k$.

Ex 12 : Les fonctions polynômes sont $\mathcal{C}^\infty$

Thm 13 (Génocchi ?). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists n_x \in \mathbb{N}$ telle que $f^{(n_x)}(x) = 0$. Alors f est une fonction polynôme.

C-ex 14 : La fonction $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas $\mathcal{C}^1$.

2) Quelques théorèmes importants

Thm 15 : (Prolongement continu). Soit $f : I \to \Omega$. Si $a \in \partial I$ et que f admet une limite ℓ en a, alors $\exists !$ prolongement $\tilde{f}$ de f à $I \cup \{a\}$ continu en a défini par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in I$ et $\tilde{f}(a) = \ell$.

Thm 16 (TVI) : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Si $J \subset I$ est un intervalle, alors $f(J)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

C-ex 17 : $x \mapsto \begin{cases} \cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ ou la fonction de Conway en base 13 sont des fonctions discontinues qui vérifient le TVI.

Thm 18 : (Rolle) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $a, b \in I$. Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a,b[$ telle que $f'(c) = 0$

C-ex 19 : $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{it} \end{cases}$ ne vérifie pas le thm de Rolle

Prop 20 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. P scindé $\Rightarrow$ P' scindé.

Thm 21 (AF) $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. $\exists c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

Thm 22 (Darboux). $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors $f'(I)$ est un intervalle.

Prop 23 (Prolongement de la dérivée) Si f est dérivable sur $]a,b[\setminus \{c\}$ et $c \in]a,b[$, si f' admet une limite ℓ en c, alors f dérivable en c et $f'(c) = \ell$.

Ex 24 : La fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et même $\mathcal{C}^\infty$.

Thm 25 : (Formule de Taylor Lagrange) Soit $f \in \mathcal{C}^n([a,b], \mathbb{R})$, $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$. Alors $\exists c \in]a,b[$ tel que : $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$

Thm 26 : (Formule de Taylor avec reste intégral) Soit $f \in \mathcal{C}^{(n+1)}([a,b], \mathbb{R})$.
$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n \, dt$$

C-ex 27 : $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$ est $\mathcal{C}^\infty$ mais n'est pas somme de sa série de Taylor, $f^{(n)}(0) = 0$.

3) Caractérisations topologiques des points de continuité, discontinuité.

Thm 28 : L'ensemble des points de continuité d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est un G_δ (une intersection dénombrable d'ouverts).

Prop 29 : Il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Thm 30 : L'ensemble des fonctions continues de $[0,1] \to \mathbb{R}$, nulle part dérivables est dense dans l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ (muni de la norme uniforme).

[Gourdon] p 399

Ex 31 : (fonction de Weierstrass) Soit $g : x \mapsto |x|$ sur $[-1/2, 1/2[$, 1 périodique. Alors $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(4^n x)}{4^n}$ est continue sur $\mathbb{R}$, nulle part dérivable.

Thm 32 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors l'ensemble des points de continuité de f' est dense (dans I).

Ex 33 : Soit $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{sinon} \end{cases}$. On note $Q = \mathbb{Q} \cap]-1,1[= (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On pose $u_n : \begin{cases}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x - x_n)}{e^n} \end{cases}$ et $F : \begin{cases}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \end{cases}$

F est dérivable sur $]-1,1[$ et F' est continue en a ssi $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

II] D'autres formes de continuité dérivabilité.

1) Fonctions unif continues, absolument continues, lipschitziennes

Def 34 : (Uniforme continuité) : $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue si $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x, y \in I,\ |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Prop 35 : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur I alors f est continue sur I.

C-ex 36 : $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas uniformément continue.

Thm 37 : Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.

Def 38 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit qu'elle est absolument continue sur I, si $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in I^{2n}$ vérifiant $x_1 < y_1 \leq x_2 < y_2 \leq \dots \leq x_n < y_n$, $\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| < \eta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon$.

Prop 39 : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est absolument continue sur I, alors f est uniformément continue sur I.

C-ex 40 : $f : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x \sin(\frac{\pi}{x}) & \text{si } x \in]0,1] \end{cases} \end{cases}$ est uniformément continue sur $[0,1]$, mais pas absolument continue.

Def 41 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est k-lipschitzienne si $\forall x, y \in I$, on a $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

Prop 42 : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est k-lipschitzienne alors f est absolument continue.

C-ex 43 : La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est absolument continue mais pas lipschitzienne.

Ex 44 : L'escalier de Cantor f défini par : $f_0(x) = x\ \forall x \in [0,1]$, et $f_{n+1} \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1/2 f_n(3x) & \text{si } 0 \leq x < 1/3 \\ 1/2 & \text{si } 1/3 \leq x \leq 2/3 \\ 1/2 f_n(3x-2) + 1/2 & \text{si } 2/3 < x \leq 1 \end{cases} \end{cases}$ et $f = \lim_{n \to +\infty} f_n$ est continue croissante et pas absolument continue.

2) Théorème fondamental de calcul.

Ex 45 : L'escalier de Cantor est dérivable presque partout sur $[0,1]$ et vérifie $f'(x) = 0$ aux points où la dérivée existe. $\int_0^1 f'(t)\,dt \neq f(1) - f(0)$

Ex 46 : Soit $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ et $f(0) = 0$. La fonction f est partout dérivable mais $\int_0^1 |f'(t)|\,dt = \infty$, et donc $f' \notin L^1$.

Thm 47 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue non décroissante. Alors les énoncés suivants sont équivalents :

1) f est absolument continue sur I
2) l'image de f d'un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle
3) f est presque partout différentiable sur I, est dans L^1 et $\forall x \in [a,b]$ $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$.

Thm 48 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, dérivable en tout point de $[a,b]$ et dont la dérivée $f' \in L^1$ sur $[a,b]$, alors on a $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$ $(a \leq x \leq b)$.

3) Fonctions analytiques, développables en série entière.

Def 49 : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite analytique (ou dans le cadre réel développable en série entière), si $\forall x_0 \in I$, $\exists r > 0$ $\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ $(a_n \in \mathbb{C})$

Prop 50 : Si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ $\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[$, $r > 0$, Alors $x \mapsto f(x)$ est continue sur $]x_0 - r, x_0 + r[$.

Prop 51 : Si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ $\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[$, alors f est dérivable $\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ et $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$

Corollaire 52 : Sous les mêmes hypothèses, f est C^∞ sur $]x_0 - r, x_0 + r[$ et $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_p = \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!}$

Ex 53 : $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$; $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ $\forall x \in]-1,1[$

$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$

Thm 54 (Morgenstern) : L'espace $C^\infty([0,1])$ muni de la topologie de la convergence uniforme de toutes les dérivées contient un G_δ dense de fonctions analytiques nulle part.

Thm 55 : (Thm de réalisation de Borel) Pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, il existe une fonction f de classe C^∞ d'une variable réelle et à valeur complexe définie au voisinage de 0 telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(0) = a_n$.

III | Etude de la continuité et de la dérivabilité de certaines classes de fonctions.

1) Fonctions monotones

Prop 56 L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est au plus dénombrable.

Ex 57. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0,1]$ une bijection. On pose pour $x \in [0,1]$, $A_x = \{ n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) \leq x \}$. Alors $x \mapsto f(x) = \sum_{n \in A_x} 1/2^n$ est une fonction croissante sur $[0,1]$ et discontinue sur $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

Prop 58 $f : I \to \mathbb{R}$ monotone est continue ssi $f(I)$ est un intervalle (où I est un intervalle).

Prop 59 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Si f' est monotone alors f' est continue.

Thm 60. (ADMIS) Une fonction monotone est dérivable presque partout.

2) Fonctions convexes.

Prop 61 : Si f est convexe sur un intervalle I, alors f est continue sur $\mathring{I}$ et admet une dérivée à gauche et à droite en tout point de $\mathring{I}$.

C-ex 62 : $f : \begin{cases} [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$ est convexe et non continue en 0.

Prop 63 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
Alors si f est dérivable : f convexe $\iff$ f' croissante.
Si f est 2 fois dérivable : f convexe $\iff f'' \geq 0$

Coro 64 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe dérivable, alors $f \in \mathcal{C}^1(I)$.

Ex 65 : La fonction $x \mapsto \exp(x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Thm 66 : (Rademacher). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors f est dérivable presque partout.

3) Suites et séries de fonctions

Thm 67 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonction continues en x_0 telles que (f_n) converge uniformément vers f. Alors f est continue en x_0.

Rm 68 : On a le même résultat avec des séries de fonctions

Thm 69 : (Dini). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions continues sur un compact X. On suppose que $\forall x \in X$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ et que f est $\mathcal{C}^0(X)$. Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X.

Thm 70 : (Limite simple de Baire) : Soit $(f_n)_n \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$, on suppose que $(f_n)_n$ converge simplement vers f. Alors f est continue sur un ensemble dense de $\mathbb{R}$.

Coro 71 : Une fonction dérivée est continue sur un ensemble dense

Ex 72 : Limite simple d'une suite double de fonctions continues, qui n'est continue en aucun point : $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lim\limits_{m\to+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} (\cos(m!\,\pi x))^{2n} \end{cases}$

Thm 73 : (Weierstrass) Toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Thm 74 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. Si $\exists x_0 \in [a,b]$ tel que $(f_n(x_0))_n$ CV et si (f_n') CVU sur $[a,b]$ vers g, alors $(f_n)_n$ CVU sur $[a,b]$ vers $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ et $f' = g$.

Ex 75 : $\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1;+\infty[$

C-ex 76 : Soit $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x}{1+n^2x^2} \end{cases}$. La suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle et la suite (f_n') CVS vers $g = \mathbb{1}_{\{0\}}$.

4) Cas des intégrales à paramètre

I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, (X,μ) mesuré, $f : I \times X \to \mathbb{R}$

Thm 77 : Si (i) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable
(ii) $\forall x \in X$, $t \mapsto f(t,x)$ est continue en $t_0 \in I$
(iii) $\exists g \geq 0 \in L^1$, $\forall t \in I$, $|f(t,x)| \leq g(x)$ p.p

Alors $F : t \mapsto \int_X f(t,x)\,d\mu(x)$ est continue en t_0.

C-ex 78 : $F : \begin{cases} [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_0^{+\infty} x e^{-xt}\,dt \end{cases}$ n'est pas continue en 0.

Thm 79 : Si (i) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(t,x)$ mesurable et intégrable
(ii) $\forall x \in X$, $t \mapsto f(t,x)$ dérivable sur I
(iii) $\exists g \in L^1$, tq $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$

Alors $F : t \mapsto \int_X f(t,x)\,d\mu(x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur I et $F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,d\mu(x)$.

Ex 80 : $\Gamma : x \mapsto \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$.

Théorème de Corominas

Mercedes Haiech et Alexandre Eimer

18 janvier 2017

Théorème 1 (Corominas). *Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction C^∞. Si pour tout élément $x \in \mathbf{R}$, il existe un entier $n_x \in \mathbf{N}$ tel que : $f^{(n_x)}(x) = 0$, alors f est une fonction polynomiale.*

Démonstration. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, définissons l'ensemble

$$F_n = \{x \in \mathbf{R} \mid f^{(n)}(x) = 0\}$$

et posons $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathring{F}_n$.

Étape 1 Nous allons montrer tout d'abord que sur toute composante connexe de Ω, f est polynomiale.

Comme Ω est un ouvert de $\mathbf{R}$, ses composantes connexes seront des intervalles. Soit donc $]a, b[$ une composante connexe de Ω et soit alors $[c, d] \subset]a, b[$. Donc soit $x_0 \in [c, d]$: comme $x_0 \in \mathring{F}_n$ pour un certain entier n, il existe $\eta > 0$ tel que $f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $x \in]x_0 - \eta; x_0 + \eta[$. Aussi il existe une fonction polynomiale P telle que sur l'intervalle $]x_0 - \eta; x_0 + \eta[$, on ait $f = P$. Considérons cependant

$$\Gamma = \{t \in]x_0, d[\mid \forall x \in [x_0, t], f(x) = P(x)\}.$$

L'ensemble est non vide car $x_0 + \eta \in \Gamma$, donc en tant que partie non vide majorée de $\mathbf{R}$ elle admet une borne supérieure. Soit $\gamma = \sup \Gamma$. Montrons alors que $\gamma = d$.

Par l'absurde, supposons le contraire : alors en appliquant le même raisonnement que pour x_0, on a l'existence d'un réel $\epsilon > 0$ tel que sur l'intervalle $]\gamma - \epsilon; \gamma + \epsilon[$, on ait $f = Q$ pour un certain polynôme Q. Or, pour tout élément $x \in]\gamma - \epsilon; \gamma[$, on a $Q(x) = P(x)$ et comme cette partie contient un nombre infini de points, alors $Q = P$, ce qui contredit la maximalité de γ puisque $\gamma + \epsilon$ convient alors.

Étape 2 Étudions la topologie de Ω^c de sorte à montrer que $\Omega^c = \varnothing$

Maintenant, montrons que Ω^c ne contient pas de points isolés. Par l'absurde, supposons le contraire : soit x_0 un point isolé, soit alors $\epsilon > 0$ tel que

$$[x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon] \cap \Omega^c = \{x_0\}.$$

Donc $]x_0 - \epsilon, x_0[$ et $]x_0; x_0 + \epsilon[$ sont des connexes de Ω. On est donc assuré, par ce qui précède, de l'existence de P, Q deux polynômes tels que f coïncide avec

P (resp. Q) sur $]x_0 - \epsilon, x_0[$ (resp. $]x_0; x_0 + \epsilon[$). Or par continuité de P et Q en x_0, on obtient que pour tout $i \in \mathbf{N}$: $P^{(i)}(x_0) = Q^{(i)}(x_0)$. Donc $P = Q$, soit alors n le degré de Q, on a alors que $x_0 \in \mathring{F}_{n+1}$. Ce qui est absurde. Donc Ω^c ne contient pas de points isolés.

Une fois les points isolés mis de côté, il faut étudier l'intérieur de Ω^c

Supposons par l'absurde maintenant que Ω^c est d'intérieur non vide. Or comme $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n = \mathbf{R}$ on en déduit que

$$(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n) \cap \Omega^c = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} (F_n \cap \Omega^c) = \Omega^c.$$

Comme Ω^c est un fermé de $\mathbf{R}$, il est complet. D'après le théorème de Baire, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $F_{n_0} \cap \Omega^c$ soit d'intérieur non vide. Soit $]a, b[$ tel que $]a, b[\cap\Omega^c$ un ouvert inclus dans F_{n_0}. Soit $x \in]a, b[\cap\Omega^c$. Comme Ω^c ne possède pas de point isolé, on peut trouver une suite de points distincts de $]a, b[\cap\Omega^c$ convergeant vers x. Notons cette suite $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$.

Montrons alors que

$$\forall n \geqslant n_0, x \in F_n$$

Quitte à extraire, on peut supposer que $(x_i)_{i\in I}$ est strictement monotone. Pour fixer les idées, supposons la croissante. Alors on obtient que

$$f^{(n_0)}(x_i) = f^{(n_0)}(x_{i+1}) = 0.$$

D'après le théorème de Rolle, il existe $y_i \in]x_i, x_{i+1}[$, tel que $f^{(n_0+1)}(y_i) = 0$. En itérant on aura donc construit une suite $(y_i)_{i\in\mathbf{N}}$ convergeant, par le théorème des gendarmes, vers x aussi. Or, par continuité de la dérivée $n_0 + 1$ on obtient bien que $f^{(n_0+1)}(x) = 0$.

En itérant encore le raisonnement, on aura donc prouvé que $\forall n \geqslant n_0 : x \in F_n$.

Donnons nous alors $x \in]a, b[\cap\Omega$. Puisque $\Omega^c\cap]a, b[\neq \varnothing$, alors la composante connexe de x dans Ω -notée Ω_x- a une extrémité dans $]a, b[$. Notons la x_0. D'après ce que l'on a vu précédemment, il existe un polynôme P tel que $P = f$ sur Ω_x. Cependant $x_0 \in \Omega^c\cap]a, b[$ ce qui implique d'après ce qui précède que

$$\forall n \geqslant n_0, f^{(n)}(x_0) = P^{(n)}(x_0) = 0.$$

Ainsi le degré de P est inférieur strictement à n_0.

Donc pour tout $x \in]a, b[$, $f^{(n_0)} = 0$, ainsi $]a, b[\subset \mathring{F}_{n_0}$, cependant :

$$]a, b[\cap\Omega^c \neq \varnothing$$

par hypothèse, ce qui est absurde. Donc Ω^c est d'intérieur vide, et comme il ne possède pas de points isolés, cet ensemble est vide.

Aussi $\Omega = \mathbf{R}$ et donc f est polynomiale sur $\mathbf{R}$.

$\square$

Théorème de Morgenstern

Mercedes Haiech et Alexandre Eimer

18 janvier 2017

Soit $F = \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbf{R})$ muni de la métrique suivante :

$$\forall (f,g) \in F^2, \quad d(f,g) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \min\{2^{-n}, \left\|(f-g)^{(n)}\right\|_\infty\}.$$

On rappelle que (F,d) est un espace métrique complet. En effet :

Remarque 1. *Cette topologie est celle de la convergence uniforme de toutes les dérivées.*

Plus précisément : soit $(f_k)_k$ une suite de F convergeant vers f et $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N$:

$$\varepsilon \geqslant d(f_k, f) \geqslant \min\{2^{-i}, \left\|f_n^{(i)} - f^{(i)}\right\|\}.$$

Cette relation étant vraie pour tout entier $i \in \mathbf{N}^*$, on obtient que :

$$\forall i \in \mathbf{N}^*, \left\|f_n^{(i)} - f^{(i)}\right\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

On va prouver le théorème suivant :

Théorème 1 (Morgenstern). *Il existe des fonctions de F analytiques en aucun point.*

Démonstration. Soit $a \in [0,1] \cap \mathbf{Q}$. Posons

$$T(a,n) = \{f \in F \mid \forall k \in \mathbf{N}, |f^{(k)}(a)| \leqslant k! n^k\}.$$

Nous allons montrer que $T(a,n)$ est un fermé d'intérieur vide.

Caractère fermé. Donnons nous $(f_k)_k$ une suite de $T(a,n)$ convergente (pour d) vers f. Montrons que la limite f est dans $T(a,n)$. Comme

$$\forall i \in \mathbf{N}^*, \left\|f_k^{(i)} - f^{(i)}\right\|_\infty \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

on obtient alors :

$$f^{(i)}(a) = \lim_{k\to\infty} f_k^{(i)}(a) \leqslant i! n^i.$$

Donc $T(a,n)$ est fermé.

D'intérieur vide. Pour ce faire montrons que

$$\forall f \in T(a,n), \forall \varepsilon > 0, \exists g \in B_d(f,\varepsilon), \text{ tel que : } g \notin T(a,n).$$

Soient alors $b > 0$ et $c \in \mathbf{R}$, considérons la fonction :

$$\begin{array}{rccl} f_{c,b}: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & c\cos(b(x-a)). \end{array}$$

On a immédiatement les deux relations suivantes :

$$\left\| f_{c,b}^{(i)} \right\|_\infty = |c| \cdot b^i$$

$$f_{c,b}^{(2i)}(a) = (-1)^i c \cdot b^{2i}.$$

Comme la suite des restes d'une série convergente convergent vers zéro on peut trouver un entier k suffisamment grand tel que :

$$\sum_{i \geqslant k} \frac{1}{2^i} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

À k et n fixés, on peut aussi choisir $b > 2$ tel que :

$$b^k > \frac{2 \cdot (2k)!\, n^{2k}}{\varepsilon}.$$

Soit alors :

$$\begin{array}{rccl} s: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) + \frac{\varepsilon}{2} f_{b^{-k},b}(x). \end{array}$$

De ce fait, soit $i < k$:

$$\left\| (s-f)^{(i)} \right\|_\infty = \left\| \frac{\varepsilon}{2} f_{b^{-k},b}^{(i)}(x) \right\|_\infty = \frac{\varepsilon}{2} b^{i-k} \leqslant \varepsilon 2^{i-k-1}.$$

Donc on obtient :

$$\begin{array}{rcl} d(f,s) & = & \sum_{i \in \mathbf{N}} \min(2^{-i}, \|(s-f)^i\|_\infty) \\ & = & \sum_{i<k} \min(2^{-i}, \|(s-f)^i\|_\infty) + \sum_{i \geqslant k} \min(2^{-i}, \|(s-f)^i\|_\infty) \\ & \leqslant & \sum_{i<k} \frac{\varepsilon}{2} 2^{i-k} + \sum_{i \geqslant k} 2^i \\ & \leqslant & \varepsilon. \end{array}$$

Et d'autre part :

$$\left| f^{(2k)}(a) - s^{(2k)}(a) \right| = \left| \frac{\varepsilon}{2} f_{b^{-k},b}^{(2k)}(a) \right| = \frac{\varepsilon}{2} b^{-k} b^{2k} > (2k)! n^{2k}.$$

Donc $s \notin T(a,n)$, ainsi on aura prouvé que $T(a,n)$ est non vide.

Conclusion. On rappelle que par définition f est analytique en a si et seulement si il existe un voisinage de a sur lequel f soit somme de sa série de Taylor, et donc a fortiori f est analytique en tout point de ce voisinage. Ainsi comme les boules ouvertes centrées en les rationnelles forment une base de voisinage, on en déduit que f est analytique sur $[0,1]$ si et seulement si f est analytique pour tout a rationnel.

De plus la convergence de la série de Taylor en a implique d'après le critère de Hadamard :

$$\sup_{k \in \mathbf{N}} \{ (\frac{f^{(k)}(a)}{k!})^{\frac{1}{k}} \} < \infty$$

Donc pour un n suffisamment grand, $f \in T(a,n)$.

Or d'après le théorème de Baire :

$$\mathcal{A} = \bigcup_{a \in [0,1] \cap \mathbf{Q}} \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} T(a,n)$$

est un fermé d'intérieur vide. Alors le complémentaire de $\mathcal{A}$ est non vide, donc si $f \in \mathcal{A}^c$, alors f est analytique en aucun point de $[0,1]$.

□