Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$

I. NOTIONS DE CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ

1. Continuité

Def 1 : On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in I$ si
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in I \ |x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$
On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I si f est continue en tout point de I.
On note $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

Ex 2 : Les fonctions constantes, $x \mapsto x^n$, $x \mapsto \sin(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Prop 3 : Une fonction continue en un point est bornée au voisinage de ce point.

Prop 4 : (caractérisation séquentielle de la continuité).
Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in I$ ssi pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de I, qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Ex 5 : La fonction $1\!\!1_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

App 6 : Deux fonctions continues égales sur une partie dense de $\mathbb{R}$ sont égales sur $\mathbb{R}$.

Thm 7 : (prolongement par continuité)
Si $f : I \to \mathbb{R}$ a une limite ℓ en $a \in \bar{I} \setminus \mathring{I}$, alors il existe un unique prolongement $\tilde{f}$ de f à $I \cup \{a\}$ qui est continu en a et défini par :
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}.$$
On dit que f se prolonge par continuité en a.

Ex 8 : La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

Def 9 : On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue si
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall (x,y) \in I^2 \ |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Ex 10 : La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

Prop 11 : Une fonction uniformément continue est continue.

C-ex 12 :

2. Dérivabilité, liens avec la continuité.

On suppose dans cette partie que I est un intervalle ouvert.

Def 13 : On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$ si la fonction $x \in I \setminus \{a\} \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie en a.
Quand elle existe, elle est unique et on la note $f'(a)$.

Rq 14 : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$ ssi elle admet un développement limité d'ordre 1 en a : $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + o(x-a)$.
Et dans ce cas, $a_0 = f(a)$ et $a_1 = f'(a)$.

Def 15 : On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.
On note $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I dont la dérivée est continue sur I.

Ex 16 : La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction cosinus.

Prop 17 : Les sommes, produits, inverse (si la fonction ne s'annule pas) de fonctions dérivables sont dérivables.

Prop 18 : Soient I et J deux intervalles ouverts, $f : I \to J$ une fonction dérivable en $a \in I$ et $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $b = f(a)$. Alors la fonction $g \circ f$ définie sur I est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a)$.

App 19 : (calculs de dérivées de fonctions réciproques)
$\forall x \in]-1, 1[$, $\operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Prop 20 : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$ alors f est continue en a.

C-ex 21 : La fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

C-ex 22 : La fonction de Van der Waerden définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)$$
où φ est la fonction 2-périodique sur $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in [-1, 1]$ $\varphi(x) = |x|$ est continue mais nulle part dérivable.

Thm 23 : Si $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ est muni de la norme uniforme, alors l'ensemble des fonctions $f \in E$ qui ne sont dérivables en aucun point de $[0,1]$ est dense dans E. **DÉVELOPPEMENT N°1**

3. Stabilité des notions

Prop 24 : La continuité est stable par somme, produit, inverse et composition (en faisant attention aux domaines).

Prop 25 : $(\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}), +, \cdot, \times)$ est une algèbre.

Def 26 : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$.
On dit que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers $f : I \to \mathbb{R}$ si
$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in I \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$
On dit que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f : I \to \mathbb{R}$ si
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \forall x \in I \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Rq 27 : La convergence uniforme implique la convergence simple.

Thm 28 : La limite uniforme f d'une suite de fonctions continues $(f_n)_n$ est continue.

C-ex 29 : La suite $(x \mapsto x^n)_n$ converge simplement vers la fonction $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ sur $[0,1]$ qui n'est pas continue.

Thm 30 : Si I est ouvert et si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions définies et dérivables sur I qui converge simplement sur I vers une fonction f et si la suite $(f_n')_n$ converge uniformément vers une fonction $g : I \to \mathbb{R}$, alors f est dérivable sur I et $f' = g$.

C-ex 31 : $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. $(f_n)_n$ est une suite de fonctions $\mathcal{C}^1$ qui converge uniformément vers $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ non dérivable en 0.

II. PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES ET TOPOLOGIE

1. Compacité et continuité.

Prop 31 : Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés.

Prop 32 : L'image d'un compact par une fonction continue est un compact.

Thm 33 : Une fonction continue sur un compact de $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

On considère maintenant K un compact de $\mathbb{R}$.

Déf 34 : On appelle norme de la convergence uniforme la norme définie pour tout $f \in \mathcal{C}^0(K,\mathbb{R})$ par $\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$.

Prop 35 : Une suite de fonctions $(f_n)_n$ continues sur K converge uniformément vers $f \in \mathcal{C}^0(K,\mathbb{R})$ ssi $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Prop 36 : L'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(K,\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme est un espace de Banach.

Thm 37 : (Théorème de Heine) Une fonction continue sur un compact est uniformément continue.

App 38 : (Théorème de Weierstrass) Toute fonction réelle continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômes.

2. Connexité et continuité

Prop 39 : Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Prop 40 : L'image d'un connexe par une fonction continue est un connexe (cas général des espaces métriques).

Thm 41 : (Théorème des valeurs intermédiaires) L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Prop 42 : (un autre énoncé du théorème des valeurs intermédiaires) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et si u est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = u$.

Ex 43 : Un polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

Thm 44 (Théorème de Darboux) Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I, alors $f'(I)$ est un intervalle, càd f' vérifie la conclusion du théorème 41.

Ex 45 : La fonction $x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$ prolongée par continuité en 0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sa dérivée vérifie la conclusion des valeurs intermédiaires alors qu'elle n'est pas continue en 0.

2. Extrema, dérivation et conséquences

Thm 46 : Si $f : I \to \mathbb{R}$ admet un extremum en $c \in \mathring{I}$ et est dérivable en c, alors $f'(c) = 0$.

C-ex 47 : (réciproque fausse) : $x \mapsto x^3$ a une dérivée nulle en 0 mais pas d'extremum en 0.
(cas où $c \in I \setminus \mathring{I}$) : $x \in [0,1] \mapsto x \in \mathbb{R}$ est dérivable sur $[0,1]$ et admet un minimum local en 0, mais $f'(0) = 1 \neq 0$.

Thm 48 (Théorème de Rolle) : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

C-ex 49 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$ est continue et dérivable sur $[0,2\pi]$, $f(0) = f(2\pi)$, mais $f'(t) = ie^{it} \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

App 50 (expression de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange.) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$. On note $L_n(f)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à f. Alors, pour tout $x \in [a,b]$, il existe un point $c_x \in [a,b]$ tel que :

$$f(x) - L_n(f)(x) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) f^{(n+1)}(c_x).$$

Thm 51 (Théorème des accroissements finis) : Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Cor 52 : Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors : f est croissante ssi pour tout $x \in]a,b[$, $f'(x) \geq 0$
f est constante ssi pour tout $x \in]a,b[$, $f'(x) = 0$

Thm 53 (Inégalité des accroissements finis) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in]a,b[$, $|f'(x)| \leq M$, alors $\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leq M$.

App 54 (prolongement d'une fonction dérivable) : Si $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b[$, dérivable sur $]a,b[$, et si f' admet une limite ℓ en a, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

4. Dérivées supérieures et formules de Taylor

Déf 55 : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ si f' est de classe $\mathcal{C}^k$. En fait, $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ k fois dérivables et de dérivée k-ième continue.
On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si f est $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Thm 56 (formule de Taylor-Lagrange) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ et est $(n+1)$ fois dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Thm 57 (formule de Taylor avec reste intégral) : Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$, alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n dt.$$

Thm 58 : (formule de Taylor-Young) Soit $n \in \mathbb{N}$.
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable n fois en $a \in \mathring{I}$, alors elle admet au voisinage de a le développement limité d'ordre n suivant :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

App 59 : (inégalité de Kolmogorov) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R})$ telle que f et $f^{(n+1)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $k \in \{1,\dots n\}$, les dérivées $f^{(k)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$ avec :
$$\|f^{(k)}\|_\infty \leq 2^{\frac{k(n+1-k)}{2}} \|f\|_\infty^{1-\frac{k}{n+1}} \|f^{(n+1)}\|_\infty^{\frac{k}{n+1}}$$

III. ÉTUDE DE CERTAINES CLASSES DE FONCTIONS

1. fonctions monotones

Prop 60 : L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est au plus dénombrable.

Prop 61 : Une fonction monotone $f : I \to \mathbb{R}$ est continue ssi $f(I)$ est un intervalle.

Théorème [admis] 62 : Une fonction monotone est dérivable presque partout.

2. fonctions convexes

Def 63 : Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe si
$\forall (a,b) \in I^2 \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda) f(a) + \lambda f(b)$

Ex 64 : La fonction exponentielle est convexe.

Prop 65 : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe sur I alors f est continue sur $\mathring{I}$.

C-ex 66 : La fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$ est convexe sur $[0,+\infty[$ et n'est pas continue en 0.

Thm 67 (caractérisations d'une fonction convexe) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. Alors les assertions suivante sont équivalentes :
- i) f est convexe
- ii) f' est croissante
- iii) la courbe de f est au dessus de ses tangentes.

Cor 68 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I. Alors, f est convexe ssi pour tout $x \in I$, $f''(x) \geq 0$.

App 69 (inégalité de Hölder) Soient $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors pour tout $a_1, \dots a_n \geq 0$, $b_1, \dots b_n \geq 0$: $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$.

3. fonctions définies par une intégrale.

Thm 70 : Si $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ alors pour tout $a \in I$, pour tout $x \in I$,
$f(x) = f(a) + \int_a^x g'(t)\,dt$.

Thm 71 : Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que
- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable
- pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t,x)$ est continue sur I
- pour tout compact $K \subset I$, il existe $g \in L^1$ positive, indépendante de t telle que : pour tout $t \in K$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(t,x)| \leq g(x)$.

Alors, la fonction $F : t \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t,x)\,dx$ est continue sur I.

Ex 72 : la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$ est bien définie et est continue sur $]0,+\infty[$.

Thm 73 Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que
- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(t,x) \in L^1$
- pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur I
- pour tout compact $K \subset I$, il existe $g \in L^1$ positive, indépendante de t, telle que pour tout $t \in K$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$: $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$.

Alors, - pour tout $t \in I$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) \in L^1(\mathbb{R})$.
- la fonction F est dérivable sur I et $F'(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,d\mu(x)$.

Ex 73 : la fonction Γ de l'exemple 72 est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

4. Espace des fonctions continues sur un compact.

Thm 74 (théorème d'Ascoli) Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Soit $A \subset \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$.
Alors A est équicontinue et borné ssi A est relativement compact.
où on dit que A est équicontinue si :

DVT N°2

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in K \ |x-y| < \eta \Rightarrow \forall f \in A \ |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

App 75 (opérateurs à noyau compacts) Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\ \|_\infty$.
Soit K une application continue de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ défini par
$T(f)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y)\,dy$.

Alors T est un opérateur compact.

C-ex 76 : (la bosse glissante) Soit $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ non nulle. La suite $(t \mapsto f(t-n))_n$ est équicontinue et bornée dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mais elle n'admet pas de sous-suite uniformément convergente.

Références. - Rombaldi (Éléments d'analyse réelle)
- Gourdon (Analyse)
- Hauchecorne (Contre-exemples en mathématiques)
- Zuily-Queffélec (Analyse pour l'agrégation)