229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

I Fonctions monotones

1/ Définitions et premières propriétés

Déf: Soit $D\subset\mathbb{R}$ et $f:D\to\mathbb{R}$. On dit que f est croissante (resp. strictement croissante) sur D si:
$\forall x,y\in D,\ x<y \Rightarrow f(x)\le f(y)$ (resp. $f(x)<f(y)$)
f est dite décroissante (resp. strictement décroissante) si $-f$ est croissante (resp. strictement).
f est dite monotone (resp. strictement) si f est croissante ou décroissante (resp. strictement).
On notera $\mathcal{M}(D)$ (resp. $\mathcal{M}_+(D)$, $\mathcal{M}_-(D)$) l'ensemble des fonctions monotones (resp croissantes, décroissantes) sur D.
ex: $x\mapsto x^2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Prop: - si $f\in\mathcal{M}_+(D)$ et $\lambda\in\mathbb{R}^+$ (resp $\mathbb{R}^-$), alors $\lambda f\in\mathcal{M}_+(D)$ (resp $\lambda f\in\mathcal{M}_-(D)$)
- $\mathcal{M}_+(D)+\mathcal{M}_+(D)\subset\mathcal{M}_+(D)$, et $\mathcal{M}_-(D)+\mathcal{M}_-(D)\subset\mathcal{M}_-(D)$
- si $f,g\in\mathcal{M}_+(D)$ si $f\geq 0$ et $g\geq 0$, alors $f.g\in\mathcal{M}_+(D)$
- si $f\in\mathcal{M}_+(D)$ et si $\forall t\in D, f(t)>0$, alors $1/f\in\mathcal{M}_-(D)$
- $\mathcal{M}_+(D)\circ\mathcal{M}_+(D)\subset\mathcal{M}_+(D)$; $\mathcal{M}_-(D)\circ\mathcal{M}_-(D)\subset\mathcal{M}_+(D)$; $\mathcal{M}_+(D)\circ\mathcal{M}_-(D)\subset\mathcal{M}_-(D)$; $\mathcal{M}_-(D)\circ\mathcal{M}_+(D)\subset\mathcal{M}_-(D)$
- $f\in\mathcal{M}(D)$ est injective si et seulement si elle est strictement monotone, elle induit alors une bijection de D sur $f(D)$ dont la bijection réciproque est strictement monotone de même monotonie que f.

2/ Existence de limites et continuité

Th: Soit $f:D\to\mathbb{R}$ monotone, $a\in\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à $D\cap]a,+\infty[$ (resp. $D\cap]-\infty,a[$), alors f a une limite (finie ou non) à droite (resp. à gauche) en a.
Cor: Si I est un intervalle, $f\in\mathcal{M}(I)$ et $a\in I$ tel que $a\neq\sup I$ (resp $a\neq\inf I$), f admet une limite finie à droite (resp. à gauche) en a.
Th: Soit $f\in\mathcal{M}(I)$, l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.
ex: Soit $f:\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=1/[1/x]$, f est croissante et l'ensemble de ses points de discontinuité est $1/\mathbb{N}^*$.

3/ Monotonie et dérivabilité

Th: Soit $f:I\to\mathbb{R}$ continue et dérivable sur I, alors f est croissante (resp. décroissante) ssi $\forall t\in I$, $f'(t)\geq 0$ (resp $f'(t)\leq 0$).
f est strictement croissante (resp. décroissante) ssi $f'\geq 0$ (resp $f'\leq 0$) et $\{t\in I \mid f'(t)=0\}$ est d'intérieur vide.

Th: Une fonction monotone est dérivable presque partout.

ex: L'escalier de Cantor, défini comme limite uniforme des fonctions $f_0:x\mapsto\inf(1,\sup(x,0))$, $f_{n+1}:x\mapsto \frac{1}{2}f_n(3x)+\frac{1}{2}f_n(3x-2)$, est une fonction croissante, de dérivée presque partout nulle. (cf annexe)

4) Suites de fonctions monotones

Th (Dini): Soient $a<b$ et $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ des fonctions continues croissantes qui convergent simplement vers une fonction continue, alors la convergence est uniforme.

Th (de sélection de Helly): Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes de $\mathbb{R}\to[-1,1]$. Alors il existe une sous-suite qui converge simplement. (DEV)

5/ Fonctions à variations bornées

Déf: Soit I un intervalle de bornes $a<b$; $f : I \to \mathbb{R}$ est dite à variations bornées si sa variation totale est finie, où

$$VT(f) = \sup_{n\geq 1} \sup_{a<x_0<\dots<x_n<b} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

Th: Une fonction à variations bornées peut s'écrire comme différence de 2 fonctions croissantes.

Cor: Les fonctions à variations bornées sont dérivables presque partout.

ex: Une fonction absolument continue est à variations bornées ; si $f(x) = \int_a^x g$ où $g \in L^1$, alors $VT(f) = \|g\|_1$ et f peut s'écrire $f(x) = \int_a^x g^+ - \int_a^x g^-$.

La réciproque est fausse comme le montre l'escalier de Cantor.

II Fonctions convexes

1/ Définitions et premières propriétés

Déf: Soit $f : I \to \mathbb{R}$; elle est dite convexe (resp. strictement convexe) si $\forall x \neq y \in I, \forall t \in]0,1[$, $f(tx+(1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ (resp. $f(tx+(1-t)y) < tf(x)+(1-t)f(y)$).

Rq: On a bien entendu : f strictement convexe $\Rightarrow$ f convexe, mais la réciproque est fausse : $x \mapsto |x|$ est convexe mais pas strictement convexe.

Prop: Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe

* ssi $\forall x,y,z \in I$, $x<y<z \Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$
* ssi $\forall a \in I$, $t \mapsto \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$
* ssi l'épigraphe de f est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

cf annexe pour une illustration de l'inégalité des 3 pentes

Prop: Soient $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, $x_1, \dots, x_n \in I$, $t_1, \dots, t_n \in [0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, alors

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$$

2/ Fonctions convexes et régularité

Th: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, alors pour tout $a \in \mathring{I}$, f admet des dérivées à droite et à gauche en a, et $f'_g(a) \leq f'_d(a)$.

Ainsi f est continue sur $\mathring{I}$, de plus si $a<b$, $f'_d(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_g(b)$, et f'_g et f'_d sont croissantes sur $\mathring{I}$.

Rq: Une fonction convexe peut ne pas être continue, en effet, $\mathbb{1}_{\{0,1\}}$ est convexe sur $[0,1]$.

Th: Si I est un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$, f est convexe (resp. strictement) si et seulement si f est continue et admet une dérivée à droite croissante (resp. strictement).

Cor: Si f est 2 fois dérivable sur I ouvert, f est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$.
Si $f'' > 0$, f est strictement convexe.

Rq: $x \mapsto x^4$ fournit un contre-exemple à cette dernière propriété.

Th: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe et $a \in I$. La droite d'équation $y = f(a) + \alpha(x-a)$ est au-dessous du graphe de f si et seulement si $f'_g(a) \leq \alpha \leq f'_d(a)$. (cf annexe)

Prop: Pour une fonction convexe, les minima locaux sont les minima globaux (et sont les points où la dérivée s'annule si cette fonction est dérivable).

3/ Dimension supérieure

Soit $X \subset \mathbb{R}^N$ convexe et $f : X \to \mathbb{R}$

Déf: f est dite convexe si $\forall x, y \in X, \forall t \in [0,1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ et strictement convexe si $\forall x \neq y \in X, \forall t \in]0,1[, f(tx+(1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$.

Prop: Si f est différentiable, f est convexe (resp. strictement) si et seulement si $\forall x \neq y \in X, \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x-y \rangle \geq 0$ (resp. >0) ssi $\forall x \neq y \in X, f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle$ (resp $>$)

Prop: Si f est deux fois différentiable, f est convexe si et seulement si $\nabla^2 f$ est positive.
Si $\nabla^2 f$ est définie positive, f est strictement convexe.

Prop: Si f est convexe et $a \in X$, f a un minimum local en a ssi f a un minimum global en a (ssi $\nabla f(a) = 0$ si f est différentiable)

ex: Si $A \in S_N^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^N$, $f : x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x \rangle$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}^N$: on a $\nabla^2 f = A$. De plus, $\nabla f(x) = Ax - b$ donc $Ax = b \Leftrightarrow f$ admet un minimum en x.

III Applications

1/ Inégalités de convexité

Prop: Si $x_1, \dots, x_n > 0$, on pose $A(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $G(x) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}$ et $H(x) = n / \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$, alors $H(x) \leq G(x) \leq A(x)$.

Prop: Si $p, q > 0$ vérifient $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $a, b \in \mathbb{R}^+$,
$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$

Prop: (Hölder) si $x, y \in (\mathbb{R}^+)^N$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ pour $p, q > 0$,
$$\sum_{i=1}^{N} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} y_i^q\right)^{1/q}$$

Prop: (Minkowski) si $x, y \in (\mathbb{R}^+)^N$, $p \geq 1$,
$$\left(\sum_{i=1}^{N} (x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{N} y_i^p\right)^{1/p}$$

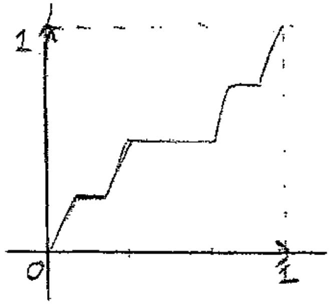
Cor: L'application $x \mapsto \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{1/p}$ est une norme sur $\mathbb{R}^N$.

Prop: (Jensen) : Si $f : X \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est convexe, si μ est une mesure de probabilité sur X et si $h \in L^1(X, \mu)$, alors
$f\left(\int_X h \, d\mu\right) \leq \int_X f \circ h \, d\mu \leq +\infty$

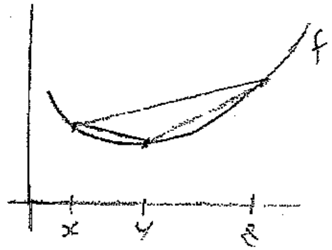
2/ Optimisation

Th: Soit $K \subset \mathbb{R}^N$ compact, il existe un unique ellipsoïde centré en O de volume minimal contenant K (DEV)

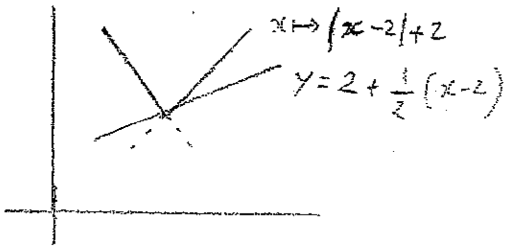
Th: Soient $A \in S_N^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^N$, $f : x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$.
La méthode du gradient à pas optimal permet de trouver le minimum de f donc la solution de $Ax = b$.



2^e itération de la suite approchant l'escalier de Cantor.



inégalité des trois pentes



Les droites en dessous du graphe de la valeur absolue ont pour coefficient directeur $\alpha \in [-1,1]$.

Réf : - Ramis-Deschamps-Odoux, Topologie et éléments d'analyse
- Gourdon, Analyse
- Rombaldi, Éléments d'analyse réelle
- FGN, Oraux X-ENS analyse 2.