1

229

Fonctions monotones, fonctions convexes
Exemple et applications

I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$

I/ Fonctions monotones

def 1 : une fonction f est dite croissante (resp décroissante)
$\forall x, y \in I,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (resp $f(x) \geq f(y)$)

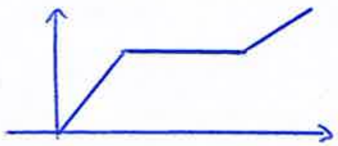
une fonction croissante ou décroissante est dite monotone.

rem 2 : f est croissante $\Leftrightarrow -f$ est décroissante

rem 3 : si les inégalités sont strictes, alors f est dite strictement monotone.

ex 4 : * $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante et même strictement

*



est croissante mais pas strictement

* Si $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est une va réelle alors sa fonction de répartition est croissante.

prop 5 : si $f : I \to \mathbb{R}$ est monotone alors f admet des limites à droite et à gauche en tout point

app 6 : une telle fonction n'admet qu'un nb dénombrable de points de discontinuité

prop 7 : si $f : I \to f(I)$ est continue, strictement monotone alors f est une bijection et f^{-1} est continue, ie f est un homéomorphisme sur son image, et de même monotonie que f

annexe 1

app 8 :
$\tan :]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est un homéomorphisme.

prop 9 : (lemme de Dini) soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de répartition convergeant simplement vers une fonction de répartition f continue, alors la convergence est uniforme sur tout $\mathbb{R}$ [WA]

app 10 : (TCL pour les quantiles)

DEV 1

soit $0 < p < 1$ et $(X_n)_n$ suite de va $\mathbb{R}$ iid de fct de répartition F. On suppose F dérivable en x_p (le quantile d'ordre p : $x_p = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid F(t) \geq p\}$) avec $F'(x_p) > 0$, alors
$$\sqrt{n}\,(\widehat{x_{p,n}} - x_p) \xrightarrow{loi} \mathcal{N}\left(0, \frac{p(1-p)}{F'(x_p)^2}\right)$$
où $\widehat{x_{p,n}}$ est l'estimateur empirique de x_p.

def 11 : soit $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, on appelle subdivision de $[a,b]$, $\sigma : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, pour un certain $n \geq 1$, on pose
$$V_a^b f = \sup_{\substack{\text{subdivision} \\ x_0 < \dots < x_n}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \right)$$ [CW]
f est dite à variation bornée si $V_a^b f < +\infty$ et on note E_a^b cet ensemble.

ex 12 : si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est monotone alors $V_a^b f = |f(b) - f(a)|$

th 13 : si $f \in E_a^b$, alors $\exists g, h$ croissante tel que $f = g - h$ [CW]

prop 14 : si f est dérivable sur I
(i) f est croissante ssi $f' \geq 0$ sur I
(ii) $f' > 0$ sur I alors f est strictement croissante.

c.ex 15 : la réciproque du point 2 est fausse, $x \mapsto x^3$ est strictement croissante, mais $f'(0) = 0$.

②

rem 16: f est strictement croissante ssi $f' \geq 0$ et $\{x \in I \mid f'(x) = 0\}$ n'a que des points isolés.

th 17: si $f : I \to \mathbb{R}$ est croissante alors elle est dérivable presque partout (ADMIS) [CW]

II / Fonctions convexes

def 18: soit $d \in \mathbb{N}^*$, $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est dite convexe si
$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \forall t \in [0,1], f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$

rem 19: * on peut généraliser la définition à toutes combinaisons convexes
* si f est continue, on peut choisir juste $t = \frac{1}{2}$
⚠ la continuité est importante.

1- en dimension 1

rem 20: f est convexe ssi les points au-dessus de la courbe de f est convexe

prop 21: soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, avec I ouvert alors
(i) f admet des dérivées à droite et à gauche en tout point
(ii) f est lipschitzienne sur tout compact de I
(iii) f'_d ; f'_g sont des fonctions croissantes sur I et :
$$\forall x < y \in I,\ f'_g(x) \leq f'_d(x) \leq f'_g(y) \leq f'_d(y)$$
(iv) si $D = \{x \in I \mid f \text{ n'est pas dérivable en } x\}$, alors f est dénombrable et f' est continue sur $I \setminus D$

prop 22: (formule des 3 pentes) si $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, alors :
$\forall x < y < z \in I$
$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$
Annexe 2

prop 23 si f est dérivable sur (a,b), sont équivalents
(i) f est convexe sur (a,b)
(ii) f' est croissante sur (a,b)
(iii) $\forall x, y \in (a,b)$, $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x)$

Annexe 3

cor 24:
(i) si f est 2 fois dérivable sur (a,b), f est convexe sur (a,b) ssi $f'' \geq 0$ sur (a,b)
(ii) si f est 2 fois dérivable sur (a,b) et si $f'' > 0$ sur (a,b), alors f est strictement convexe.

C.ex 25: $x \mapsto x^4$ contredit la réciproque du point (ii)

app 26. * convexité de exp et inégalité de Hölder
* inégalité arithmético-géométrique

prop 27: on note $\mathrm{Aff}(I)$, l'ensemble des fonctions affines
$\varphi : I \to \mathbb{R}$ est convexe ssi $\forall x \in I$, $\varphi(x) = \sup\limits_{\substack{h \in \mathrm{Aff}(I) \\ h \leq \varphi}} h(x)$

app 28: inégalité de Jensen : pour φ convexe et μ mesure de probabilité sur I, soit $f \in L^1(I, \mu)$
$$\varphi\left(\int_I f \, d\mu\right) \leq \int_I \varphi \circ f \, d\mu$$

2- dimension $d > 1$:

prop 29: (i) si f est différentiable sur $\mathbb{R}^d$, f convexe ssi
$\forall x, y \in \mathbb{R}^d$, $f(y) \geq f(x) + df(x) \cdot (y - x)$
(ii) si f est 2 fois différentiable sur $\mathbb{R}^d$, f est convexe ssi $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $d^2 f(x)$ est une forme quadratique positive.

③

rem 30 : on peut généraliser la convexité sur des fonctions définies sur des ev de dimension infinie, on perd alors la continuité.

$\ell : \begin{vmatrix} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R} \\ P \mapsto P(0) \end{vmatrix}$ avec $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme L^1 sur $[0,1]$.

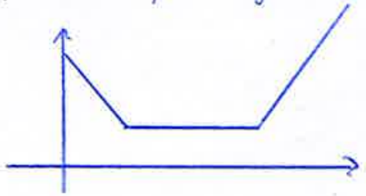
III/ Utilisation de la convexité en analyse

prop 31 : (i) si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est différentiable, convexe, et si $c \in \mathbb{R}^d$ est un minimiseur de $f \Leftrightarrow df(c) = 0$

(ii) si f est strictement convexe, alors elle admet au plus un minimiseur sur $\mathbb{R}^d$

C-ex 32 : * si on ne suppose pas f convexe, l'implication ($\Leftarrow$) du point 1 n'est pas toujours vraie. Considérer $x \mapsto x^3$.

*



: convexe mais pas strictement
$\Rightarrow$ on perd l'unicité du min.

app 33 : soit $F_\beta = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ tq $f(0) = 0$ et $f(1) = \beta\}$

alors $\min\limits_{f \in F_\beta} \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$ est atteint pour la seule fonction affine qui appartient à F_β [Rou]

def 34 :

une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite fonctionnelle quadratique si elle est de la forme $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle + c$

où $A \in S_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$

prop 35 : f est convexe ssi $A \in S_n^+(\mathbb{R})$
f est strictement convexe ssi $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

app 36 : si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

$A\bar{x} = b \Leftrightarrow \bar{x}$ minimise f

utilisation du gradient à pas optimal pour déterminer $\bar{x}$.

def 37 : pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit

$$f^*(a) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \{at - f(t)\}, \text{ pour } a \in \mathbb{R}$$

appelée transformée de Legendre-Fenchel

(*) ANNEXE 4

th 39 : soit $(X_n)_n$ une suite iid de vaR d'espérance m possédant une transformée de Laplace $\Lambda(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$ définie sur un voisinage de 0. Si $a > m$ tel que $\mathbb{P}(X > a)$ et $\Lambda^*(a)$ est atteint strictement sur le domaine de définition de Λ alors $\Lambda^*(a) > 0$ et [GS]

$$\frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i > na\right) \xrightarrow[+\infty]{} -\Lambda^*(a)$$

DEV 2

(*) rem 38 : f^* est convexe. si f convexe alors $(f^*)^* = f$.

IV/ Caractérisation par les distributions

def 40 : une distribution T est positive, si

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \geq 0 \Rightarrow \langle T, \varphi\rangle \geq 0$

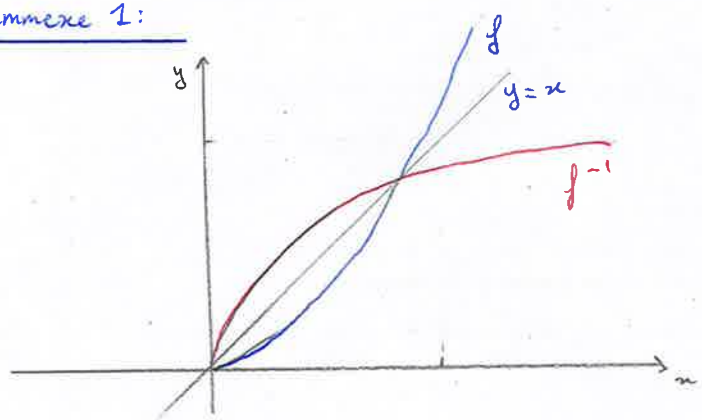
prop 41 : soit f une fonction continue (pas forcément dérivable)
f est croissante si la distribution f' est positive.

th 42 : (ADMIS)

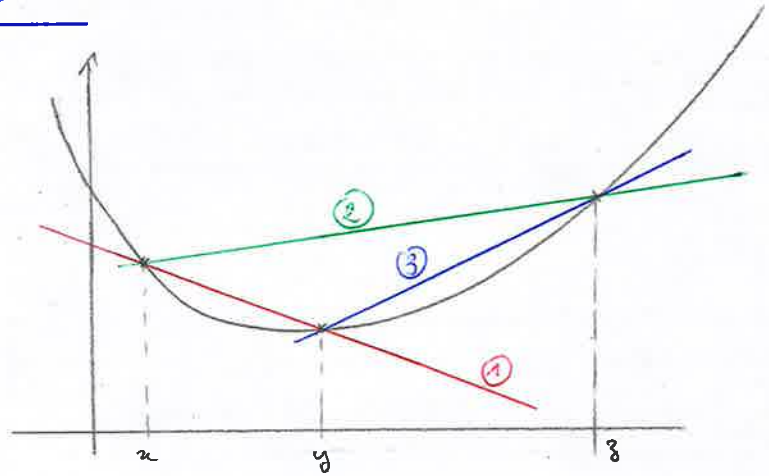
si f convexe alors la distribution f'' est positive.

si μ est mesure de radon positive alors il existe une fonction convexe f telle que $f'' = \mu$ [RY]

annexe 1 :

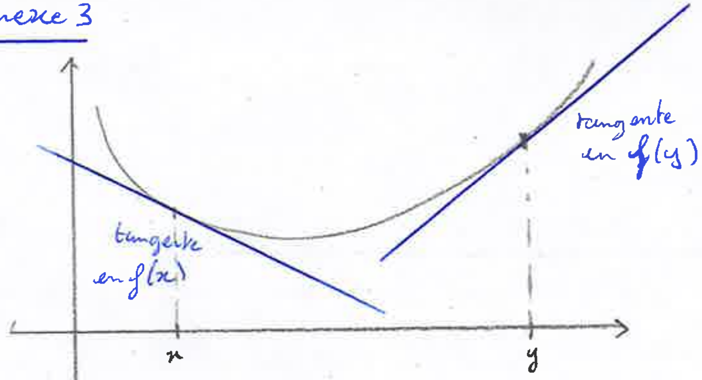


annexe 2

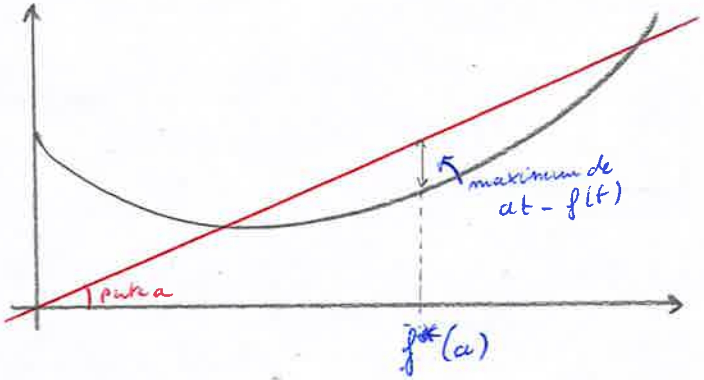


1 ≤ 2 ≤ 3

annexe 3



annexe 4



références :

[CW] Dérivation, intégration Claude Wagschal

[WA] Probabilité pour les non probabilistes, Walter Appel

[Rou] Petit guide ..., Rouvière [exo 42 de la 4e édition]

[GS] Probability and Random Processes, Grimmett Stirzaker
3e édition (pas la 2e)

[RY] Revuz - Yor