229 — Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

Cadre : I intervalle de $\mathbb{R}$; C convexe de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

I Définitions et premières propriétés

1) Fonctions monotones

Déf 1 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$. f est dite :
- croissante si : $\forall (x,y) \in I^2$, $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- strictement croissante si l'inégalité est stricte.
- décroissante si $-f$ est croissante.

f est dite monotone si f est croissante ou décroissante.

Ex 2 :
- La fonction de répartition d'une variable aléatoire est une fonction croissante.
- $\frac{1}{x}$ décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ mais pas sur tout $\mathbb{R}$.

Prop 3 :
- Si f est croissante et $\lambda \geq 0$, λf est croissante.
- si f et g croissantes, $f+g$ croissante.
- si f et g croissantes, $f \geq 0$ et $g \geq 0$, alors fg croissante.
- si f et g croissantes, $f \circ g$ croissante
- si f monotone et garde un signe constant, alors $\frac{1}{f}$ monotone.

C-ex 4 :
- $x \mapsto \cos x + \sin x$ n'est pas monotone sur $[0; \pi/2]$
- $x \mapsto x^2$ n'est pas monotone

Rqe 5 : L'ensemble des fonctions monotones n'est pas un sev.

2) Fonctions convexes

Déf 6 :
- $f : C \to \mathbb{R}$ est convexe si $\forall (x,y) \in C^2, \forall \lambda \in [0;1]$
$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$
- f est strictement convexe si l'inégalité est stricte.
- f est concave si $-f$ est convexe.

Ex 7 :
- $x \mapsto \|x\|$ convexe
- $x \mapsto \|x\|^2$ strictement convexe
- $x \mapsto \ln(x)$ est strictement concave sur $\mathbb{R}^{+*}$
- $A \in S_n(\mathbb{R}) \mapsto \lambda_{max}(A)$ convexe.

Prop 8 : 1) Une combinaison linéaire à coefficients réels positifs de fonctions convexes est convexe.
2) Le produit de deux fonctions convexes n'est pas nécessairement convexe.

Ex 9 : $x \mapsto x^3 = x^2 \times x$ non convexe

Ex 10 : Une limite simple de fonctions convexes est convexe.

Rqe 11 : Ce n'est pas vrai pour les fonctions strictement convexes.

Thm 12 : Soit $E(f)$ l'épigraphe de f (partie de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$) défini par $E(f) = \{(x,y) \in C \times \mathbb{R}, y \geq f(x)\}$. Alors f convexe $\Leftrightarrow$ $E(f)$ est convexe dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Déf 13 : $f : I \to \mathbb{R}^{+*}$ est logarithmiquement convexe (ou log-convexe) si $\ln(f)$ est convexe sur I.

Thm 14 : Une fonction log-convexe est convexe.

C-ex 15 : $x \mapsto x$ est convexe

Ex 16 :
- Γ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$
- Γ est convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$
- Γ est log-convexe.

3) Convexité et monotonie

Thm 17 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Pour tous $x < y < z$ dans I on a : $p(x,y) \leq p(x,z) \leq p(y,z)$, où $p(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. (Inégalité des trois pentes).

Thm 18 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Alors pour tout $a \in I$, la fonction $\tau_a : x \mapsto \frac{f(x)-a}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$

Thm 19 : Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est affine ssi elle est à la fois convexe et concave.

Prop 20 : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable de dérivée croissante, alors elle est convexe.

4) Fonctions à variations bornées

Déf 21 : Pour tout $[a;b]$ de $\mathbb{R}$, on note $Sub([a;b])$ l'ensemble des subdivisions σ de $[a;b]$. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.
Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$.

$\forall \sigma \in Sub([a;b])$ on note $Var_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$

Si $\exists M > 0$ tq $Var_\sigma(f) \leq M$, alors f est à variation bornée.

Rqe 22: L'ensemble des fonctions monotones n'est pas un sev.

Prop 23: Le sev engendré par les fonctions monotones et l'ensemble des fonctions à variation bornée.

II Régularité

1) Monotonie et bijectivité

Thm 24: $f: I \to \mathbb{R}$ strictement monotone. Alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$ d'inverse strictement monotone et de même sens de variation que f.

Rqe 25: Si de plus f est continue, alors elle induit un homéomorphisme de I sur $f(I)$.

Expl 26: . $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$, $x \mapsto e^x$ $\quad f^{-1}: \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln x$

Coro 27: Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f: I \to J$ un homéomorphisme. Alors f est strictement monotone.

2) Continuité

Thm 28: Soit $f: I \to \mathbb{R}$ monotone. Alors elle admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point.

Coro 29: Soit $f: I \to \mathbb{R}$ monotone. Alors f n'a que des discontinuités de première espèce.

Thm 30: Si I est un intervalle ouvert et $f: I \to \mathbb{R}$ monotone, l'ensemble de ses points de discontinuité est alors dénombrable.

Ex 31: . $f: [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]^{-1}$ est croissante avec une infinité de points de discontinuité.

Thm 32: Si f est une fonction monotone de I dans $\mathbb{R}$ telle que $f(I)$ soit un intervalle, alors f est continue sur I.

Thm 33: Soit $f: I \to \mathbb{R}$ continue.
f injective $\Leftrightarrow$ f strictement monotone.

Thm 34: Soit $f: I \to \mathbb{R}$ convexe alors f est continue sur $\mathring{I}$ et sa restriction à tout intervalle fermé de $\mathring{I}$ est lipschitzienne.

Thm 35: Si f est continue sur I et convexe sur $\mathring{I}$ alors elle est convexe sur I.

C. ex 36: Une fonction convexe n'est pas forcément continue sur I: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur }]0;1[\\ 1 & \text{si } x = 0 \text{ ou } 1 \end{cases}$

Prop 37: une fonction continue est convexe sur I ssi
$\forall (x,y) \in I^2$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$

Thm 38: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est constante ssi f est convexe et majorée

C. ex 39: $f(x) = \frac{1}{1+x}$ convexe sur $\mathbb{R}_+$ et majoré par 1 mais non constante.

3) Dérivabilité :

Thm 40: Si $f: I \to \mathbb{R}$ est continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$, f est croissante sur I ssi $\forall x \in \mathring{I}$ $f'(x) \geq 0$.

Ex 41: $f: x \mapsto x^3$ croissante car $f'(x) = x^2 \geq 0$.

Thm 42: [ADMIS] Une fonction monotone est dérivable pp.

Prop 43: Si $f: I \to \mathbb{R}$ convexe alors elle admet des dérivées à droite et à gauche en tout point de $\mathring{I}$. Les fonctions dérivées à droite (f_d) et dérivée à gauche (f_g) sont croissantes sur $\mathring{I}$ et $\forall a \in \mathring{I}$, $f_g(a) \leq f_d(a)$.

Thm 44: Si f est deux fois dérivable sur I, elle est convexe sur I ssi $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in I$.

Thm 45: Soit f une fonction différentiable sur C. On a équivalence entre :
1) f est convexe sur C
2) $\forall x, y \in C$, $(df(x) - df(y))(x-y) \geq 0$
3) $\forall x, y \in C$, $f(x) \geq f(y) + df(y)(x-y)$

4) Distribution et monotonie :

Def 46 : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. Une distribution T sur Ω est une application linéaire de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$ tq $\forall K \subset \Omega$ compact $\exists C_K > 0, k \in \mathbb{N}, |\langle T, \varphi\rangle| \leq C_K \sup_{|\alpha| \leq k} |\partial^\alpha \varphi(x)|$, $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(K)$.

Prop 47 : Soit f $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Notons a_i les points de discontinuité de f. Et f_i les morceaux continus de f alors $\mathcal{D}(f) = f_i' + \sum_{i=1}^{+\infty} (f(x_i^+) - f(x_i^-)) \delta_{x_i}$. (Formule des sauts) ou $\mathcal{D}(f)$ est la dérivée de f au sens des dist.

Appli 48 : f $\mathcal{C}^1$ par morceau. f monotone $\Leftrightarrow \mathcal{D}(f) \geq 0$ au sens des distributions

III- Applications en analyse

1) Comparaison série intégrale

Prop 49 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ positive continue par morceaux et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)$
En particulier $\sum f(k)$ et $\int_0^\infty f(t)dt$ ont même nature.

Appli 50 : Si H_n est la série harmonique $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ alors $H_n = \log(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$

2) Inégalités de convexité

Appli 51 : • $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$
(Holder) • $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ $f \in L^p, g \in L^q$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Coro 52 : $f \mapsto \|f\|_p$ est une norme sur L^p.

Thm 53 : (Jensen) Si f convexe alors pour tout combinaison linéaire convexe $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ on a $f(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i)$

Prop 54 : Soit X v.a sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et g convexe, on a $g(E(X)) \leq E(g(X))$.

Appli 55 : La variance d'une v.a est positive.

3) $x_{n+1} = f(x_n)$

Thm 56 : Si f croissante alors la suite $(x_n)_n$ est croissante si $f(x_0) \geq x_0$, décroissante si $f(x_0) \leq x_0$ où $x_{n+1} = f(x_n)$. Si I borné alors (x_n) converge et si f continue, alors la limite de (x_n) est un point fixe de f.

Thm 57 : Si f décroissante, elle admet au plus un point fixe dans I. Si I borné et f continue alors $(x_{2n})_n$ et $(x_{2n+1})_n$ convergent vers des points fixes de $f \circ f$.

4) Optimisation convexe

Thm 58 : Si f convexe sur I et admet un minimum local ce minimum est alors global.

Thm 59 : Soit f convexe sur C alors f admet au plus un minimum global sur C.

Thm 60 : Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ strictement convexe et coercive ($|f(x)| \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$) alors f admet un unique minimum global.

Appli 61 : (Ellipsoïde de John Lowner) : Pour $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On définit $\mathcal{E}_S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid {}^t x S x \leq 1\}$. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ compact contenant $0_{\mathbb{R}^n}$. Alors l'ensemble des ellipsoïdes contenant K admet un élément de volume minimal. Dev (1)

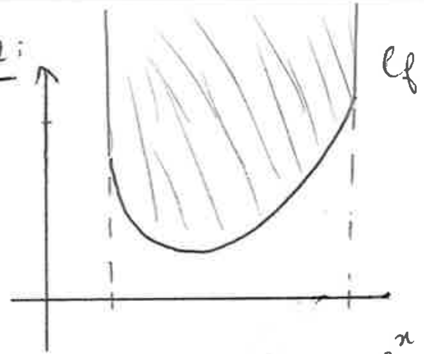
5) Application en probabilité :

Def 62 : Soit X une v.a on définit sa fonction génératrice par $G_X(s) = E[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) s^k$.

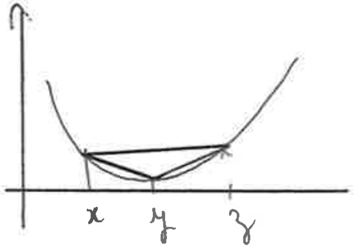
Prop 63 : G_X définie sur $[0,1]$ et est $\mathcal{C}^1$ (i) G est strictement croissant sur $]0,1[$ (ii) G est convexe sur $]0,1[$. (iii) G strictement convexe sur $]0,1[$ $\Leftrightarrow \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) < 1$.

App 64 : (Processus de Galton-Watson) : Soit $(X_{i,j})_{i,j}$ iid. Soit (Z_n) v.a tq $\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n} \end{cases}$ On pose $m = \mathbb{E}(Z_0) = \mathbb{E}(X_{i,0})$. Soit $E = \{\exists n \geq 0, Z_n = 0\}$ alors • si $m > 1$ $\mathbb{P}(E) \in [0,1[$ • si $m \leq 1$ $\mathbb{P}(E) = 1$. Dev (2)

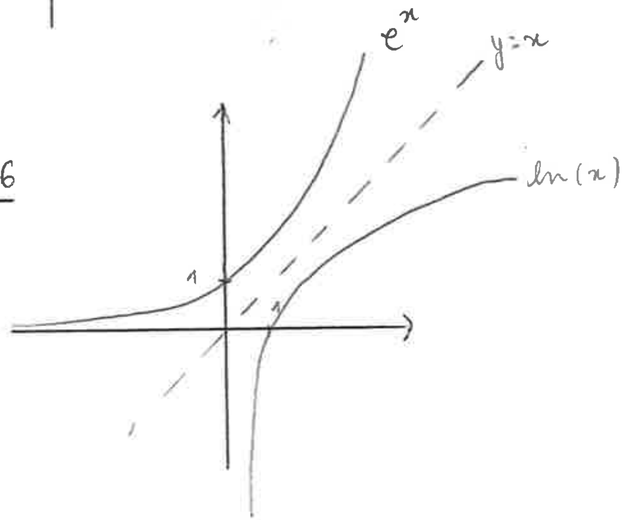
Thm 12 :



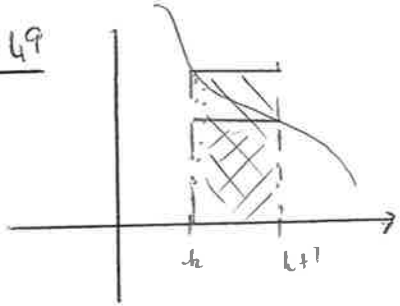
Thm 17

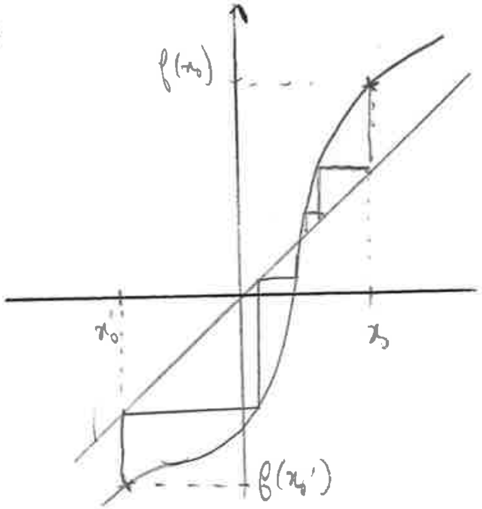


Ex 26



Prop 49





Références :

- Romaldi, Éléments d'analyse réelle
- Ramis, Deschamps, Odoux, Cours de mathématiques, 3
- Colterel,
- Arnaudiès, Fraysse.
- Gourdon, Analyse
- Beck, Malick, Peyré. Objectif agrégation.
- Ciarlet,

Autres développements possible

- Prop 23 (sev des fct° à variation bornée)
- Appli 48
- Méthode du gradient à pas optimal (III-4))
- Escalier de Cantor (III-5))
- Exemple 16 (Γ.)