229

Fonctions monotones, fonctions convexes, exemples et applications.

I Fonctions monotones

D une partie de $\mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$

1) Définitions et premières propriétés

Def 1 : Soit $f : D \to \mathbb{R}$. f est croissante (resp. strictement croissante) si : $\forall x, y \in D$, $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (resp $f(x) < f(y)$).
f est décroissante (resp. strict. décroissante) si $-f$ est croissante (resp strict. croissante).
f est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Ex 2 : $x \mapsto e^x$

Prop 3 : L'ensemble des applications décroissantes est stable par combinaison linéaire positive. L'ensemble des applications croissantes est stable par CL positive et par composition.

Prop 4 : Une application monotone $f : D \to \mathbb{R}$ est injective si et seulement si elle est strictement monotone. Elle induit une bijection de D sur $f(D)$, dont la bijection réciproque est monotone (du même sens de monotonie que f).

Rq 5 : ⚠ L'ensemble de fonctions monotones de D dans $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{M}(D)$, n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$:
$x \mapsto -x$ et $x \mapsto e^x$ sont dans $\mathcal{M}(D)$, mais pas leur somme.

Def 6 : Soit $E \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. On appelle $VB(\mathbb{R}, E)$ l'ensemble des fonctions à variation bornée, i.e. l'ensemble des fonctions $u : \mathbb{R} \to E$ tq :
$$T_u : x \mapsto \sup\left\{ \sum_{i=1}^{N} |u(x_j) - u(x_{j-1})|,\ N \in \mathbb{N}^*,\ -\infty < x_0 < \dots < x_N = x \right\}$$
soit bornée. Dans ce cas on note $VT(u) = \sup_{x \in \mathbb{R}} T_u(x)$.

Lemme 7 : Si $u \in VB(\mathbb{R}, E)$, alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :
$x < y \Rightarrow |u(y) - u(x)| \leq T_u(y) - T_u(x)$

Thm 8 : $VB(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ u = u_1 - u_2$ avec u_1 et u_2 croissantes bornées$\}$

Cor 9 : $VB(I, \mathbb{R})$ est engendré par $\mathcal{M}(I)$.

2) Régularité – a) Continuité et monotonie

Thm 10 : Soit $f \in \mathcal{M}(D)$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que a soit adhérent à $D \cap]a, +\infty[$ (resp $D \cap]-\infty, a[$). Alors f admet une limite, finie ou infinie, à droite (resp. à gauche) au point a.

Cor 11 : Soit $f \in \mathcal{M}(D)$ et a un point adhérent à $D \cap]a, +\infty[$. Alors f admet une limite finie à droite au point a ssi f est minorée sur $D \cap]a, +\infty[$

Ex 12 : $x \mapsto \ln x$, $a = 0$

Thm 13 : Soit $f \in \mathcal{M}(I)$. L'ensemble E_f des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

Ex 14 : $f : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \text{ si } x = 0 \\ \quad \dfrac{1}{\lfloor 1/x \rfloor} \text{ sinon} \end{cases}$ f est croissante et $\# E_f$ est infini.

b) Dérivabilité et monotonie

Rappel 15 : Théorème des accroissements finis. Soit $I = [a,b]$ un intervalle réel, E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $f : I \to E$ et $g : I \to \mathbb{R}$ des applications continues admettant en tout point de $]a,b[$ des dérivées à droite tq :
$\forall t \in]a,b[$, $f'_d(t) \leq g'_d(t)$. Alors $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$.

Thm 16 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue sur I et dérivable à droite sur $\mathring{I}$. Alors :
- f est constante ssi $\forall t \in \mathring{I}$, $f'_d(t) = 0$
- f est croissante ssi $\forall t \in \mathring{I}$, $f'_d(t) \geq 0$
- f est décroissante ssi $\forall t \in \mathring{I}$, $f'_d(t) \leq 0$.

Thm 17 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue sur I et dérivable à droite sur $\mathring{I}$. Alors f est strictement croissante (resp. strict. décroissante) sur I ssi $f'_d \geq 0$ (resp $f'_d \leq 0$) et $\{t \in \mathring{I},\ f'_d(t) = 0\}$ est d'intérieur vide.

Cor 18 : Si $u \in VB(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors :
- u est bornée,
- u admet une limite à gauche en tout point de $]-\infty, +\infty]$ et une limite à droite en tout point de $[-\infty, +\infty[$.
- u est continue sauf sur un ensemble au plus dénombrable.
- u est mesurable et localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

3) Applications : suites et séries de fonctions

a) Suites récurrentes

Thm 19 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ tq $f(I) \subset I$. On considère la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

Alors : - Si f est croissante, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, et son sens de monotonie est donné par le signe de $u_1 - u_0$.

- Si f est décroissante, alors $f\circ f$ est croissante. Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, de sens de monotonie opposé.

Cf ANNEXE

b) Second théorème de Dini

Thm 20 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles croissantes, continues définies sur I. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f continue, alors la convergence est uniforme.

c) Comparaison série - intégrale

Thm 21 : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{i=0}^{n} f(i) - \int_0^n f(t)dt$ est convergente.

En particulier, $\sum f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

Ex 22 : Définition de la constante γ d'Euler :

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log(n) + \gamma + o(1)$

II Fonctions convexes

$(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $I\subset E$ un convexe.

1) Définitions et premières propriétés

Def 23 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe si :

$\forall x,y\in I^2, \forall t\in[0,1], f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$

Cf ANNEXE

On dit que f est concave si $-f$ est convexe.

On parle de stricte convexité et stricte concavité lorsque l'inégalité est stricte, quand $t\in]0,1[$.

Prop 24 : L'application f est convexe ssi son épigraphe $\{(x,y)\in I\times\mathbb{R}, y\geq f(x)\}$ est convexe dans $E\times\mathbb{R}$. **Cf ANNEXE**

Ex 25 : $x\mapsto x^2$, $x\mapsto \|x\|$

Prop 26 : L'ensemble des fonctions convexes est stable par combinaison linéaire, mais pas par multiplication.

Si f,g sont des fonctions convexes et f croissante, alors $f\circ g$ est convexe.

C-ex 27 : Pour la multiplication : $x\mapsto \|x\|$ et $x\mapsto x^3$

Pour la composée : g convexe quelconque et $f = -\mathrm{id}$.

Thm 28 : Une fonction $f : I\to\mathbb{R}$ est convexe ssi pour tout $(x,y)\in I^2$, la fonction $f_{xy} : \begin{cases}[0,1] \to \mathbb{R} \\ t\mapsto f((1-t)x+ty)\end{cases}$ est convexe.

Dans la suite, on se ramène donc à des fonctions convexes sur $\mathbb{R}$.

2) Caractérisations

Thm 29 : Pour $E=\mathbb{R}$ et $f : I\to\mathbb{R}$, on a équivalence entre :

(i) f est convexe ;

(ii) Pour tout $x<y<z$; $p(x,y) < p(x,z) < p(y,z)$ où $p(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ (inégalité des 3 pentes) **Cf ANNEXE**

(iii) Pour tout $a\in I$, la fonction $\tau_a : x\mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I\setminus\{a\}$.

Thm 30 : Soit f une fonction dérivable sur $I\subset\mathbb{R}$. On a équivalence entre : (i) f est convexe ;

(ii) la fonction dérivée f' est croissante sur I ;

(iii) la courbe représentative de f est située au dessus de sa tangente en tout point de I.

Thm 31 : Soit U un ouvert convexe de E et $f : U\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable. On a équivalence entre :

(i) f est convexe

(ii) $\forall (x,y)\in U^2, (df(x) - df(y))(x-y) \geq 0$

(iii) $\forall (x,y)\in U^2, f(x)\geq f(y) + df(y)(x-y)$

Thm 32 : Si f est deux fois dérivable sur $I\subset\mathbb{R}$, alors f est convexe (resp concave) sur I ssi $f''\geq 0$ (resp. $f''\leq 0$) sur I.

Rq 33 : ⚠ On ne peut pas généraliser aux fonctions strictement convexes en remplaçant l'inégalité par une inégalité stricte : $x\mapsto x^4$ est strictement convexe, et $x\mapsto 12x^2$ s'annule en 0.

3) Régularité

Thm 34 : Si f est convexe sur $I\subset\mathbb{R}$, sa restriction à tout intervalle $[a,b]\subset \mathring{I}$ est lipschitzienne.

Cor 35 : Une fonction convexe sur $I\subset\mathbb{R}$ est continue sur $\mathring{I}$.

Thm 36 : Si f est convexe sur $I \subset \mathbb{R}$, alors elle admet une dérivée à gauche et à droite en tout point de $\mathring{I}$. Les fonctions dérivée à droite et à gauche sont croissantes sur $\mathring{I}$, et pour $a<b$ dans $\mathring{I}$, on a :

$$f_g'(a) \leq f_d'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f_g'(b) \leq f_d'(b)$$

III Applications de la convexité

1) Inégalités de convexité

Illustration 37 : On peut représenter graphiquement la suite d'inégalités suivante, si $x,y \geq 0$:

$$\underbrace{\frac{2xy}{x+y}}_{=H} \leq \underbrace{\sqrt{xy}}_{=G} \leq \underbrace{\frac{x+y}{2}}_{=A} \leq \underbrace{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}}_{=Q}$$

cf ANNEXE

Lemme 38 : Si $p,q \in \mathbb{R}_+^*$ sont tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, on a :
$\forall u,v \in \mathbb{R}_+^*$, $u^{1/p}v^{1/q} \leq \frac{1}{p}u + \frac{1}{q}v$

Cor 39 : Inégalité d'Hölder. Soit S un espace mesuré, $p,q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ avec la convention $\frac{1}{\infty}=0$, $f \in L^p(S)$ et $g \in L^q(S)$. Alors $fg \in L^1(S)$ et : $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Thm 40 : Inégalité de Minkowsky. Soit S un espace mesuré, $p \in [1,+\infty]$ et $f,g \in L^p(S)$. Alors $f+g \in L^p(S)$ et :
$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

Cor 41 : Pour $p \in [1,+\infty]$, $\|.\|_p$ est une norme sur L^p.

2) Lien avec les probabilités

Def 42 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit la fonction génératrice de X comme la somme de la série entière $G(t) := \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n$, si $t \in \mathbb{R}$. Quand la série est bien définie, on a $G(t) = E(t^X)$.

Prop 43 : Une fonction génératrice est convexe sur son ensemble de définition.

App 44 : Soit $(X_{i,n})_{i,n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ iid. On définit la suite (Z_n) par : $\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n} \end{cases}$. Alors :

$$P(\{\exists n, Z_n = 0\}) \begin{cases} \{0\} \text{ si } P(X_0^0 = 0) = 0 \\ ]0,1[\text{ si } P(X_0^0 = 0) > 0 \text{ et } E(X_0^0) > 1 \\ \{1\} \text{ sinon} \end{cases}$$

DEV (1)

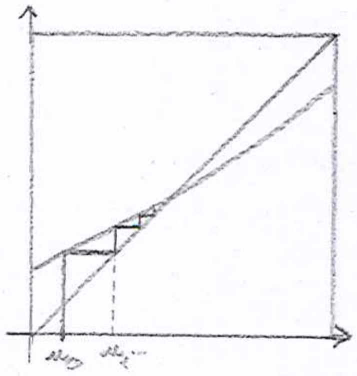
3) Recherche de minimum

Prop 45 : - Si f une fonction convexe admet sur I un minimum local en un point α, ce minimum est global
- Si f est strictement convexe sur I compact, elle atteint son minimum en un unique point

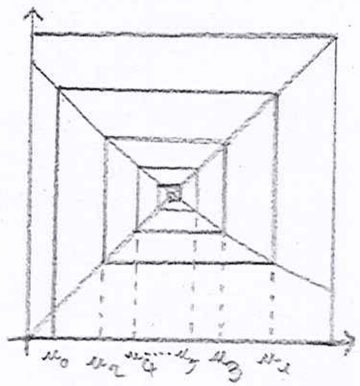
Thm 46 : Ellipsoïde de John Loewner.
Soit K compact d'intérieur non vide. Alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0, contenant K, de volume minimal.

DEV (2)

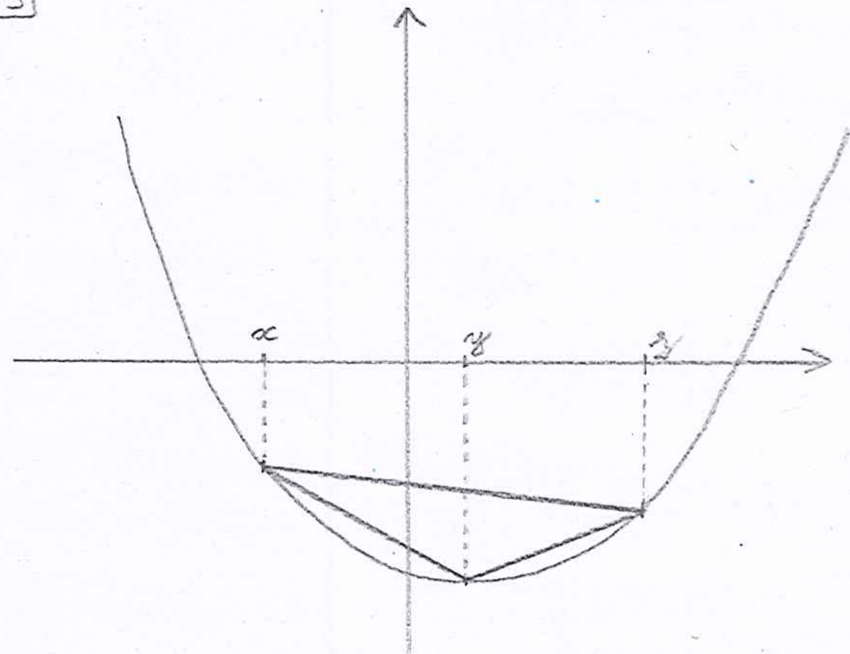
19| f croissante



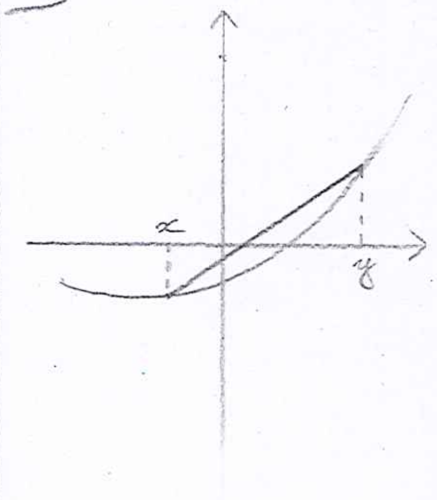
19| f décroissante



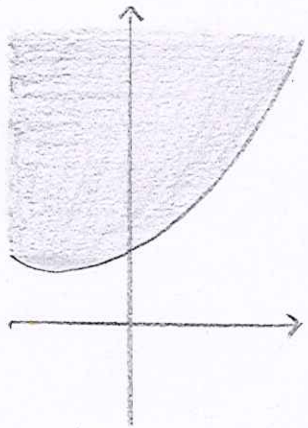
29|



23|



24|



37|