(1)

NOM :

Prénom :

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 230 - Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques - Exemples

Autre sujet :

I- Définitions et critères de convergence pour les séries à termes positifs

1) Définitions

Déf 1 : Soit $(u_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = u_0 + \dots + u_n$. On note $\sum u_n$ cette série. S_n est appelé somme partielle d'indice n.

On dit que $\sum u_n$ est convergente si la suite $(S_n)_n$ converge ; on note $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ la limite.

On définit $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ le reste d'indice n.

ex 2 : Si $q \in \mathbb{C}$ avec $|q| < 1$, $\sum q^n$ converge et vaut $(1-q)^{-1}$.

Prop 3 : La série $\sum u_n$ converge dans K ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall p \geq n \geq N, |u_n + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon$ (C'est le critère de Cauchy)

Rmq : Dans ce cas, $u_n \longrightarrow 0$; réciproque fausse : série harmonique : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge.

Thm 4 : Toute série absolument convergente d'éléments de K (i.e telle que $\sum |u_n|$ converge) est convergente dans K.

Rmq : • Ceci motive l'étude des séries à termes positifs.

• Réciproque fausse : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais pas absolument

2) Critères de convergence

Cadre : Séries à termes positifs.

Prop 5 : Une série $\sum u_n$ à termes positifs converge ssi $(S_n)_n$ est majorée.

Prop 6 : Si $0 \leq u_n \leq v_n$ $\forall n$ alors : $\sum v_n < \infty \Rightarrow \sum u_n < \infty$ et $\sum u_n = \infty \Rightarrow \sum v_n = \infty$.

Prop 7 : (i) Si $v_n = O(u_n)$ et $\sum u_n < \infty$, alors $\sum v_n < \infty$.

(ii) Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. **ex :** $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$

Rmq : Faux en général si les termes ne sont pas tous positifs : $u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$: $\sum v_n < \infty$ par critère des séries alternées (cf II)

Prop 8 : (règle de D'Alembert) Si $u_n \geq 0$ $\forall n$, et si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda \geq 0$. Alors :

• Si $\lambda < 1$, $\sum u_n < \infty$ • Si $\lambda > 1$, $\sum u_n = \infty$

• Si $\lambda = 1_+$, $\sum u_n = \infty$.

Rmq : Le cas $\lambda = 1$ n'a pas de conclusion générale :

ex : • $u_n = \frac{1}{n^2}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow 1$ et $\sum u_n < \infty$

• $u_n = \frac{1}{n}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow 1$ et $\sum u_n = \infty$

Prop 9 : (règle de Cauchy) Si $\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow \lambda \geq 0$:

• Si $\lambda < 1$, $\sum u_n < \infty$ • Si $\lambda > 1$, $\sum u_n = \infty$

• Si $\lambda = 1_+$, $\sum u_n = \infty$.

Rmq : même remarque pour $\lambda = 1$...

Prop 10 (règle de Raab-Duhamel)

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{-1}$ (lorsque $n \to +\infty$)

alors $\exists \lambda > 0$, $u_n \sim \lambda n^{-a}$.

ex. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \left(\frac{n+a}{n+b}\right) u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ($a, b \geq 0$ fixés)

Alors $\sum u_n$ converge ssi $b - a > 1$.

Rmq : cette règle reste vraie avec un $O(\frac{1}{n^\alpha})$, $\alpha > 1$.

3) Comparaison série-intégrale

Prop 11 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, ≥ 0, continue par morceaux, et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Alors la suite (U_n) définie par : $U_n = \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)dt$ est convergente.

NOM :

Prénom :

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi :

Autre sujet :

En particulier, $\sum f(n)$ et $\int_0^{\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.

ex : Séries de Riemann : $\sum \frac{1}{n^\alpha} < \infty \iff \alpha > 1$

Séries de Bertrand : $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} < \infty \iff \alpha > 1$ ou $\begin{cases}\alpha = 1\\ \beta > 1\end{cases}$

Série harmonique divergente, et $H_n - \ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma > 0$

Généralisation : Formule d'Euler-Maclaurin

Déf 12 : On appelle nombres de Bernoulli (b_n) tels que au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, $\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{n!} z^n$.

On appelle polynômes de Bernoulli (B_n) les polynômes donnés par la série génératrice :

$$\frac{ze^{zx}}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n \quad \forall x \in \mathbb{C}, \forall z \text{ au voisinage de } 0.$$

On notera $\tilde{B}_n$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ 1-périodique qui coïncide avec B_n sur $[0,1[$.

Prop 13 : (Euler-Maclaurin) Soit $m, n \in \mathbb{Z}$, $m < n$, $r \in \mathbb{N}^*$ et $f : [m,n] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^r$.

Alors $$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(t)\,dt + \frac{f(m)+f(n)}{2} + \sum_{k=2}^{r} \frac{b_k}{k!}\left(f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(m)\right) + R_r,$$ où :

$$R_r = \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \int_m^n \tilde{B}_r(t) f^{(r)}(t)\,dt.$$

Appli : • Développement asymptotique de H_n : $\forall r \geq 2$

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \sum_{k=2}^{r} \frac{(-1)^{k-1}}{k} b_k \frac{1}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

• Développement asymptotique de $n!$ à l'aide de $f(x) = \ln(x)$.

II - Étude générale des séries numériques

Thm 14 : (Critère spécial des séries alternées) Soit $(a_n)_n$ une suite positive, décroissante et tendant vers 0. Alors $\sum (-1)^n a_n$ converge, et les restes vérifient $|R_n| \leq a_{n+1}$.

ex : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

c-ex : $u_n = (-1)^n a_n$ où $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{1}{n^2} & \text{sinon} \end{cases}$

ex : $\sum u_n < \infty$ dès que $\alpha > \frac{1}{2}$, où $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^n}$

Principe : On écrit $$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_k = \alpha_0 u_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k + \alpha_n S_n,$$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Thm 15 : (règle d'Abel) Soit $\sum u_n$ une série numérique, avec $u_n = \alpha_n v_n$. On suppose que :

* $\alpha_n \geq 0$, (α_n) décroissante, et $\alpha_n \to 0$
* $\sum v_n$ est bornée.

Alors $\sum u_n < \infty$.

ex : $\sum e^{in\theta}/n^\alpha$ converge $\forall \alpha > 0$ (où $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ réel)

Déf 16 : $\sum u_n$ est commutativement convergente si $\forall \varphi \in Bij(\mathbb{N})$, $\sum u_{\varphi(n)}$ est convergente.

Prop 17 : Si $\sum u_n$ converge absolument, alors elle est commutativement convergente, et on a $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\varphi(n)}$ $\forall \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective.

Prop 18 : Soit $\sum u_n$ une série réelle semi-convergente (ie convergente mais non absolument), alors $\sum u_n$ n'est pas commutativement convergente.

NOM :

Prénom :

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi :

Autre sujet :

Thm 19 Soit $\sum a_p$ et $\sum b_q$ deux séries numériques absolument convergentes. Alors $\sum c_n$ est absolument convergente où $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$. De plus, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{p=0}^{\infty} a_p\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty} b_q\right)$.

ex: $\frac{e^z-1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$ (d'où la définition des b_n ...)

c-ex: $u_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n=0 \\ 2^n & \text{si } n\geq 1 \end{cases}$ $v_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n=0 \\ 1 & \text{si } n\geq 1 \end{cases}$

$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$. Alors $\sum w_n$ converge bien que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent.

Thm 20. Soit $(u_{p,q})_{p,q}$ suite numérique. On a les équivalences :
(i) $\forall q$, $\sum_p u_{p,q}$ CVA et $\sum_q \left(\sum_{p=0}^{\infty} |u_{p,q}|\right)$ converge.
(ii) $\forall p$, $\sum_q u_{p,q}$ CVA et $\sum_p \left(\sum_{q=0}^{\infty} |u_{p,q}|\right)$ converge.
Dans ce cas : $\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q}$.

ex: $\sum_{k=2}^{\infty} (\zeta(k)-1) = 1$.

c-ex: $u_{n,p} = \begin{cases} 1 & \text{si } n=p \\ -1/2^{p-n} & \text{si } n<p \\ 0 & \text{si } n>p \end{cases}$. Alors $\sum_n \sum_p u_{n,p}$ et $\sum_p \sum_n u_{n,p}$ convergent mais n'ont pas la même somme.

III - Utilisation de séries de fonctions

Lemme 21 (Abel) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^n)_n$ est bornée. Alors :
(i) $\forall |z|<|z_0|$, $\sum a_n z^n$ CVA
(ii) $\forall 0<r<|z_0|$, $\sum a_n z^n$ converge normalement dans $\bar{D}(0,r)$.

Déf 22 On note $R := \sup\{r\geq 0 \,;\, (|a_n| r^n)_n \text{ est bornée}\}$ le rayon de convergence de la série entière.

Prop 23. Formule de Hadamard : $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Prop 24 : $f : z \mapsto \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est holomorphe sur $D(0,R)$, et on a $f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$.

ex: $e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$, $z\in\mathbb{C}$; $\arctan(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, $x\in\mathbb{R}$

Thm 25 (Taubérien faible) Soit $F(x) := \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, supposée continue sur $[0,1[$, avec $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Si $F(x) \xrightarrow[x\to 1]{} l\in\mathbb{R}$ alors $\sum a_n < \infty$, et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l$. DVT

ex: $\frac{\pi}{4} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Cadre : Fonctions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$.
Pour $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-périodique, on note : $c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\,dt$ son ne coefficient de Fourier, $n\in\mathbb{Z}$.
$e_n : t \mapsto e^{int}$

Prop 26 (Parseval) Si $f\in L^2(\mathbb{T})$ où $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, alors $\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$.

ex: $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ avec $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi,\pi]$.

Thm 27 (Dirichlet) Si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, alors $\forall x\in\mathbb{R}$, on a :
$$\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$$

ex: Calcul de $\zeta(2)$ avec $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi,\pi]$.

Prop 28 (Formule sommatoire de Poisson) Si $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R})$ avec $|f(x)|\leq M(1+|x|)^{-\alpha}$, $\alpha>1$ et $M\geq 0$, tel que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$. Alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$. Appli : $\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\frac{1}{t}\right)$ où $\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$, $t>0$.

TF : $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x\xi}\,dx$.

Réf : - GOURDON : Analyse (pour tout le plan + les 2 développements)
- HAUCHECORNE : Exemples et Contre-exemples
- TAUVEL : Analyse complexe pour la L3 (pour le II-3))