230

Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

I) Généralités

1) Définitions et premières propriétés

DEF: Soit (u_n) une suite à valeurs réelles ou complexes. On appelle série de terme général u_n la suite (S_n) des sommes partielles $S_n = u_0 + \dots + u_n$. On note $\sum u_n$ cette série.

DEF: On dit que $\sum u_n$ converge lorsque (S_n) converge. La limite est appelée somme de la série lorsqu'elle existe et le reste est défini par $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

EX: a) Séries arithmétiques $\sum_{n\in\mathbb{N}} na$ où $a \neq 0$ divergent.

b) Séries géométriques $\sum_{n\geq 0} q^n$ où $q \in \mathbb{C}$ converge ssi $|q| < 1$. Alors $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

PROP: Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

REM: On verra plus loin que la réciproque est fausse.

2) Critère de Cauchy et convergence absolue.

PROP: (critère de Cauchy) Pour que $\sum u_n$ converge il faut et il suffit que

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=n}^{p+n} u_k\right| < \varepsilon .$$

Application: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge. Pourtant $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

DEF: $\sum u_n$ est dite absolument convergente si $\sum |u_n|$ converge.

TH: Toute série absolument convergente est convergente.

REM: La réciproque est fausse : $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge alors que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

II) Séries à terme général positif

1) Premières propriétés et critères de convergence

PROP: Si u_n décroît, $u_n \geq 0$, et $\sum u_n$ converge, alors $n u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

REM: Sans l'hypothèse de décroissance on n'a même pas $u_n = O(\frac{1}{n})$.

TH: Une série $\sum u_n$ à termes réels positifs converge si et seulement si la suite (S_n) des sommes partielles est majorée.

TH: (de comparaison) Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$. Alors si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ aussi, et si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ aussi.

TH: Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ à termes positifs. Alors :

(i) Si $v_n = O(u_n)$ pour $n \to \infty$, et si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge.

(ii) Si $u_n \sim v_n$ pour $n \to \infty$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

EX: (Séries de Riemann) Soit $\alpha > 0$. Alors $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Application: critère de converge en comparant u_n et $\frac{1}{n^\alpha}$.

EX: (règle de Cauchy) On compare u_n avec des séries géométriques. Avec $L = \limsup \sqrt[n]{u_n}$ on a $\sum u_n$ qui diverge si $L > 1$, converge si $L < 1$. Si $L = 1$ on ne peut rien dire.

TH: Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ à termes positifs telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Alors :

(i) Si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ converge et $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$

(ii) Si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge et $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Application : Posons $H_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$. Alors :

$$H_n = \log n + \gamma + o(1) \text{ où } \gamma\in\mathbb{R} \text{ (constante d'Euler)}$$

PROP : (comparaison série intégrale) Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ une fonction positive, continue par morceaux décroissante. Alors (u_n) définie par $u_n = f(0)+\dots+f(n) - \int_0^n f(t)\,dt$ est convergente. En particulier, $\sum f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.

Applications :

- retrouver le résultat sur les séries de Riemann
- retrouver le développement de H_n.
- Séries de Bertrand $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^\alpha \log^\beta n}$, $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

$$\left(\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha\log^\beta n} \text{ converge}\right) \iff \big((\alpha>1) \text{ ou } (\alpha=1 \text{ et } \beta>1)\big)$$

2) Cas de séries à termes >0

PROP : (Règle de Raabe et Duhamel) Soit (u_n) suite à termes >0 telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\frac{a}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)} \text{ pour } n\to\infty.$$

Alors il existe $d>0$ tel que $u_n \sim \frac{d}{n^a}$ pour $n\to\infty$.

REM : $\sum u_n$ converge ~~ssi~~ $a>1$.

PROP : (Règle de d'Alembert)

Soit $\sum u_n$ une série à termes >0 telle que

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = d\in[0,+\infty].$$

Alors :

(i) Si $d<1$, $\sum u_n$ converge

(ii) Si $d>1$, $\sum u_n$ diverge

(iii) Si $d=1^+$, $\sum u_n$ diverge

III Séries à terme général quelconque

Méthode d'étude : on étudie d'abord $\sum|u_n|$, et si elle converge on applique le critère de convergence absolue. Sinon on a diverses méthodes suivant les cas.

1) Méthodes de calcul de la nature de $\sum u_n$

a) Séries alternées

DEF : une série alternée est une série dont les termes sont alternativement ≥ 0 et ≤ 0. Quitte à changer tous les signes, on peut écrire $\sum(-1)^n u_n$ où $u_n\geq 0$.

TH : Soit (u_n) une suite à termes ≥ 0, décroissant vers 0. Alors $\sum(-1)^n u_n$ converge et les restes $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$ vérifient $|R_n|\leq u_{n+1}$.

EX : $\sum\frac{(-1)^n}{n}$.

b) Règle d'Abel

TH : Soit $\sum u_n$ avec $u_n=\alpha_n v_n$, $\alpha_n\in\mathbb{C}$, $v_n\in\mathbb{C}$ tel qu'il existe A, $\forall n\geq 0$, $\forall p\geq 0$, $|v_n+\dots+v_{n+p}|\leq A$, la série $\sum|\alpha_n-\alpha_{n+1}|$ converge et $\alpha_n\to 0$. Alors $\sum u_n$ converge.

EX : $\sum \alpha_n e^{in\theta}$ où α_n décroît vers 0 et $\theta\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ converge.

2) Séries commutativement convergentes et produit de Cauchy

DEF : $\sum u_n$ est dite commutativement convergente si pour toute bijection $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $\sum u_{\varphi(n)}$ converge.

TH : Une série absolument convergente est commutativement convergente.

DEF : On dit que $\sum u_n$ est semi-converge si elle converge mais pas absolument.

TH : (Riemann) Soit $\sum u_n$ semi-convergente, $\alpha\in\mathbb{R}$. Alors $\exists\sigma\in\mathfrak{S}(\mathbb{N})$, $\sum u_{\sigma(n)}$ converge de somme α.

TH : Soient $\sum u_p$, $\sum v_q$ deux séries absolument convergentes.

Alors $\sum c_n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ appelé produit de Cauchy de $\sum u_p$ et $\sum v_q$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right).$$

3) Produits infinis

DEF: Etant donnée une suite (a_n) de réels, on étudie la suite $p_n = \prod_{k=0}^{n} a_k$. On dira que $\prod a_n$ converge si p_n a une limite non nulle pour $n \to \infty$, notée $\prod_{k=0}^{+\infty} a_n$.

TH: Pour que le produit converge, il faut $a_n \to 1$.

TH: On écrit $a_n = 1 + u_n$. On suppose $1 + a_n > 0$. Alors $\prod(1+u_n)$ et $\sum \log(1+u_n)$ sont de même nature convergente ou divergente.

EX: $\prod_{n\geq 2}\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ diverge.

DEF: On appelle fonction ζ de Riemann, ζ définie pour s tel que $Re(s) > 1$ par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$.

PROP: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \left(\frac{x}{k\pi}\right)^2\right)$.

Application: Calcul de $\zeta(2n)$ pour $n > 0$. (DEV)

IV Séries entières

DEF: Une série entière est une série de la forme $\sum a_n z^n$, où $a_n \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$.

PROP: (Lemme d'Abel) Soit $\sum a_n z^n$ est une série entière, et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^n)$ soit bornée. Alors
$\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < |z_0|$, $\sum a_n z^n$ converge absolument.

DEF: Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Le nombre $R = \sup\{r \geq 0 \mid (|a_n r^n|) \text{ est bornée}\}$ s'appelle rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

COR: (du lemme d'Abel)
$\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ converge absolument
$\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| > R$, $\sum a_n z^n$ diverge.

REM: Sur le "bord" on ~~ne~~ peut rien dire en général. (ex: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$).

TH: (Taubérien faible) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. Si $n a_n \to 0$, et si $\sum a_n x^n$ tend vers une limite finie S lorsque $x \underset{x<1, x\in\mathbb{R}}{\to} 1$, alors $\sum a_n$ converge, vers S.

DEF: Une fonction $f : \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie dans un voisinage de 0 est dite développable en série entière en 0 si f coïncide sur ce voisinage avec la somme d'une série entière de rayon de convergence non nul.

PROP: Si un tel développement existe il est unique.

PROP: Si f réelle est développable en série entière au voisinage de 0, f est C^{∞} sur ce voisinage.

Application: Notons B_n le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$. Alors $B_n = \frac{1}{e}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^n}{k!}$ (DEV)

Références:

Gourdon (Analyse)

J. Combes (Suites et séries)

FGN analyse 1 (preuve ζ de Riemann).