L'objectif de ce cours est de donner un sens à l'écriture $\sum_{i\in I} u_i$ quand I est infini.
On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Généralités sur les séries

1. Définitions et premières propriétés

définition 01 : Série
Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et on appelle série de terme général u_n le couple (u_n, S_n). On note cette série $\sum u_n$.

inversement si $(S_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on peut lui associer une série de terme général u_n défini par $u_0 = S_0$ et $u_n = S_n - S_{n-1}$ et ainsi $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$.

définition 02 : Série convergente, divergente ; somme d'une série ; Reste.
On dit que la série $\sum u_n$ est convergente si la suite (S_n) admet une limite $S \in \mathbb{K}$. On note alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ que l'on appelle Somme de la série.
Dans ce cas, on appelle reste d'ordre R_n la quantité $S - S_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$
Si la suite (S_n) n'admet pas de limite dans $\mathbb{K}$, on dit que la série diverge.

exemples : • Séries géométriques
La série $\sum \lambda^n$ converge si et seulement si $|\lambda| < 1$ ou $\lambda = 0$.
. Série arithmétique : la série $\sum (u_0 + n r)$ diverge sauf si $u_0 = r = 0$.
. $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge $\left[S_n = \frac{n}{n+1}\right]$.

Proposition 01 : Condition nécessaire de convergence
Pour qu'une série converge il est nécessaire (mais non suffisant) que son terme général tende vers 0.

contre exemple de la réciproque : $\sum \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ diverge alors que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$

2. Critère de Cauchy et convergence absolue

Théorème 01 : Critère de Cauchy
Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. $\sum u_n$ converge $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p > n > N_\varepsilon, \left|\sum_{k=n+1}^{p} u_k\right| \leq \varepsilon$

Applications : • $\sum \frac{1}{n}$ diverge
• $\sum \frac{\cos(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ diverge

définition 03 : Convergence absolue ; semi-convergence
On dit que $\sum u_n$ est absolument convergente si $\sum |u_n|$ est convergente
$\sum u_n$ est dite semi-convergente si $\sum u_n$ converge mais $\sum |u_n|$ diverge

Théorème 02 : Toute série absolument convergente est convergente

exemples de séries absolument convergentes : • $\sum (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$
• $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$
• $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$

Nous verrons plus tard que $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente.

II Etude des séries réelles à termes positifs

Théorème 03 : Critère de convergence
Si $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, alors $\sum u_n$ converge $\iff (S_n)$ est majorée

Théorème 04 : Théorème de comparaison
Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles à termes positifs, alors
• Si $u_n \leq v_n$ ou $u_n = O(v_n)$ ou $u_n = o(v_n)$
alors $\begin{cases} \sum v_n \text{ converge} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge} \\ \sum u_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum v_n \text{ diverge} \end{cases}$
. Si $u_n = \Theta(v_n)$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

exemple : • $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$

Application : Règle de n^α.
Si $\exists \alpha > 1$ tel que $(n^\alpha u_n)$ est majorée, alors $\sum u_n$ converge
Si $\exists \alpha \leq 1$ tel que $(n^\alpha u_n)$ est minorée par une constante $k > 0$, alors $\sum u_n$ diverge.

exemples : • $\forall a \in \mathbb{R}$, $\sum \frac{1}{n^2 + a^2}$ converge.
• $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge

Application : la formule de Stirling

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ et soit $L = \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n}$.

→ Si $L < 1$ alors $\sum u_n$ converge

→ si $L > 1$ alors $\sum u_n$ diverge

si $0 < \alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geq 1$.

Si $L = 1$ on ne peut pas conclure exemple avec $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

remarque: la suite des restes des séries relevant de cette règle est controllée par une suite géométrique.

Théorème 06: Sommation des équivalents

Si $a_n \sim b_n$, alors

- Si $\sum a_n$ converge $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$ où $((a_n),(b_n)) \in (\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}})^2$
- Si $\sum a_n$ diverge $\sum_{k=0}^{n} a_k \sim \sum_{k=0}^{n} b_k$

Application: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$

Théorème 07: Comparaison Séries-intégrales

Soit f une fonction définie sur une demi droite $[a,+\infty[$, positive et décroissante

$\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[a,+\infty[$

application: • Séries de Riemann: $\sum \frac{1}{n^\alpha}$

• Séries de Bertrand: $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$

Théorème 08: Règle de D'Alembert

Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers une limite l.

- Si $l < 1$, $\sum u_n$ converg
- Si $l > 1$, $\sum u_n$ diverge

exemple: $\sum n!\, a^{n^2}$ converge si et seulement si $a < 1$ [avec $a > 0$]

remarque: La suite des reste est alors controllée par une suite géométrique.

Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ où β est constante.

si $\beta > 1$, alors $\sum u_n$ converge

si $\beta < 1$, alors $\sum u_n$ diverge

exemples: $\sum \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$ diverge et $\sum \frac{1}{4^n(2n+2)}\binom{2n}{n}$ converge.

III Série de terme général quelconque

1. Déterminer la nature de la Série

définition 04: Série alternée

Une série $\sum u_n$ est appellée série alternée si (u_n) s'écrit $((-1)^n v_n)$ où la suite (v_n) est de signe constant.

Théorème 10: Critère spécial des séries alternées

Soit $\sum (-1)^n v_n$, une série alternée telle que (v_n) décroit vers 0.

Alors $\sum (-1)^n v_n$ converge et sa somme S vérifie

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k v_k \leq S \leq \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k v_k$

exemple: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge

Théorème 11: Règle d'Abel

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$ est bornée.

Soit $(\varepsilon_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$, décroissante et tendant vers 0.

Alors $\sum \varepsilon_n v_n$ converge.

exemple: $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} e^{i\alpha n}$ converge et donc $\sum \frac{\cos(n\alpha)}{\sqrt{n}}$ converge

2. Commutative convergence

définition 05: Commutative convergence

Une série $\sum u_n$ est commutativement convergente si $\forall \sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, $\sum u_{\sigma(n)}$ converge

Théorème 12: Cas de l'absolue convergence

La convergence absolue entraine la convergence commutative et la somme n'est pas modifiée par le réarrangement des termes

Théorème 13: Théorème de Riemann

Soit $\sum u_n$ une série semi convergente à valeurs réelle.

$\forall S \in \overline{\mathbb{R}}$, $\exists \sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et soit de somme S.

3. Produits infinis

définition 06 : Produit convergent

Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}^{*})^{\mathbb{N}}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = \prod_{i=0}^{n} u_i$.
On dit que le produit infini de terme général u_n est convergent (noté $\prod u_n$ converge)
si la suite P_n admet une limite finie $P \neq 0$.
On écrit alors $P = \prod_{i=0}^{+\infty} P_i$ et on

Proposition 02 : Condition nécessaire de convergence.
Si $\prod u_n$ converge, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$

exemple : $\prod_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{\sin(x)}{x}$ a $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Théorème 14 : Série des log.
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$
$\prod u_n$ converge si et seulement si $\sum \ln(u_n)$ converge

remarque : les quantités $\ln(u_n)$ sont bien définies à partir d'un certain rang.

exemple : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$, $\prod\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ converge et $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$

définition 08 : Fonction zêta de Riemann
On appelle fonction zêta de Riemann la fonction définie sur $\{z \in \mathbb{C}, Re(z) > 1\}$
par $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$

Application : Utilisation du développement Eulérien de sin pour calculer $\zeta(2n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

I Séries entières

définition 09 : Série entière (SE)
Une série entière de la variable complexe z est une série dont le terme général est de la forme $a_n z^n$ où $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est la suite des coefficients.

Proposition 03 : Lemme d'Abel
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^n)$ est bornée. Alors $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, $\sum a_n z^n$ converge absolument

définition 10 : Rayon de convergence
On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ de $\{r \in \mathbb{R}_+^*, (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$

exemple : le rayon de $\sum \frac{1}{n!} z^n$ vaut $+\infty$.

Théorème 15 : Théorème taubérien faible
Soit $\sum a_n z^n$ une SE de rayon de convergence 1 et de somme f.
Si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\exists S \in \mathbb{C}$, $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x \in]-1,1[}} f(x) = S$, alors $\sum a_n$ converge et est de somme S.

définition 11 : fonction développable en série entière (DSE)
On dit que f est DSE au voisinage de $0 \in \mathbb{C}$ s'il existe un voisinage U de 0 tel que f est définie sur U et $\exists (a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\forall z \in U$, $\sum a_n z^n = f(z)$

Proposition 04 : Unicité du DSE et classe $\mathcal{C}^{\infty}$
Si f est DSE au voisinage de 0, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$ et f est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ au voisinage de 0.

Application au dénombrement : calcul des nombres de Bell : nombre de partitions de $[\![1,n]\!]$

V Séries de Fourier

définition 12 : Coefficients de Fourier et Série de Fourier
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π périodique intégrable sur tout compact.
On appelle coefficient de Fourier de f la suite $(c_n(f))$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \; c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt$$
On appelle série de Fourier la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{int}$

Théorème 16 : Théorème de Parseval
Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π périodique est intégrable sur $[-\pi, \pi]$, alors
$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

application : calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

définition 13 : Convergence normale
Une série de fonction $\sum f_n$ converge normalement si $\sum \|f_n\|_\infty$ converge

Théorème 17 :
Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue, 2π-périodique et intégrable sur tout compact alors $\sum c_n$ converge absolument $\iff$ la série de Fourier de f converge normalement vers f.

Application : Formule sommatoire de Poisson & une application à la Recherche d'[illegible]

CHAPITRE 1

LES NOMBRES DE BELL

L'objectif est l'étude du nombre de partitions d'un ensemble fini. C'est également le nombre de relations d'équivalence sur cet ensemble. Pour celà on utilise des séries génératrices. [Fra 07].
On appelle B_n le nombre de partitions d'un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Une relation de récurrence entre les B_n est établie dans la première partie. La seconde partie contient l'étude de la série génératrice exponentielle de la suite (B_n) et la troisième présente la valeur des B_n.

1 Une relation de récurrence

Lemme 1 (Relation entre les B_n).

$\forall n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k B_k.$

Démonstration : Par convention, on fixe $B_0 = 1$. Par définition de B_n, il vient $B_1 = 1$.
Pour $k \in [\![0, n]\!]$, construire une partition de $[\![1, n+1]\!]$ pour laquelle la partie de $[\![1, n+1]\!]$ contenant $n+1$ est de cardinal $k+1$ revient à choisir k éléments de $[\![1, n]\!]$, puis à réaliser une partition des $n-k$ éléments restants. Ainsi, l'ensemble E_k des partitions de $[\![1, n+1]\!]$ pour lesquelles la partie de $[\![1, n+1]\!]$ contenant $n+1$ est de cardinal $k+1$ est de cardinal $\mathrm{C}_n^k B_{n-k}$.

Comme de plus, l'ensemble des partitions de $[\![1, n+1]\!]$ est $\displaystyle\bigsqcup_{k=0}^{n} E_k$, il vient :

$\forall n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k B_k$ [Par le changement d'indice $k = n - k$]. ∎

2 Étude de la série génératrice exponentielle de (B_n)

On pose $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$.

Proposition 1.

Le rayon de convergence, R, de la précédente série entière n'est pas nul et

$$\forall z \in]-R, R[,\ f(z) = e^{e^z - 1}. \tag{1.1}$$

Démonstration :

Minorer le rayon de convergence de f revient à majorer les B_n. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n \leqslant n!$.
Pour $n = 1$ et $n = 2$, la propriété est vérifiée.

Supposons, $\exists n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n \Rightarrow B_k \leqslant k!$.

Alors, $B_{n+1} \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k k! = n! \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(n-k)!} \leqslant (n+1)!$ et ainsi, $R \geqslant 1$.

Calculons $f(z)$ pour $z \in]-R, R[$.

Soit $z \in]-R, R[$. Par définition, $f(z) = 1 + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{B_{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1}$.

De plus, f est dérivable et $\forall z \in]-R, R[$, $f'(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{B_{n+1}}{n!} z^n$.

Il vient donc $f'(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k B_k \right) z^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{B_k}{k!} \dfrac{1}{(n-k)!} \right) z^n$.

On reconnait un produit de Cauchy entre les séries $\sum \dfrac{B_n}{n!} z^n$ et $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ et donc $f'(z) = e^z f(z)$.

La résolution de cette equation différentielle avec la condition initiale $f(0) = 1$ s'écrit $f(z) = e^{e^z - 1}$. ■

3 Valeur des (B_n)

Théorème 1 (Valeur des B_n).

$$\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$$

Démonstration :

La série exponentielle a un rayon de convergence infini, ainsi, $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^{e^z} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^{nz}}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(nz)^k}{k!}$.

On considère la famille $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ définie par $u_{n,k} = \dfrac{(nz)^k}{n!k!}$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}| = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{|nz|^k}{n!k!} = \dfrac{e^{|nz|}}{n!}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^{|nz|}}{n!} = e^{e^{|z|}}$.

Ainsi, $\forall z \in \mathbb{C}$, la famille est sommable et donc,

$f(z) = \dfrac{1}{e} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_{n,k} \right) = \dfrac{1}{e} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} \right) = \dfrac{1}{e} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^k}{n!} \right) \dfrac{z^k}{k!}$.

Il vient donc le résultat par unicité du développement en série entière de f. ■

CHAPITRE 2

LA FORMULE DE STIRLING

L'objectif de ce chapitre est de démontrer que $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ [LF 72].

Considérons la suite (S_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $S_n = \ln\left(\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right)$.

Elle est associée à la série de terme général u_n où $u_n = S_n - S_{n-1} = \ln\left(e\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}}\right)$.

Ainsi, $u_n = 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Ainsi la série de terme général u_n converge et donc, $\exists S \in \mathbb{R}^\star$, $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n S\sqrt{n}$.

Calculons maintenant la valeur de S.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\, dx$.

En effectuant une intégration par partie, il vient la relation $I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}$ et donc partant de $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$, il vient, $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} I_{2p} = \dfrac{\prod_{i=1}^{p} 2i-1}{\prod_{i=1}^{p} 2i}\dfrac{\pi}{2}. \\ I_{2p+1} = \dfrac{\prod_{i=1}^{p} 2i}{\prod_{i=1}^{p+1} 2i-1}. \end{cases}$$

Comme $\sin(x) \in [0,1]$ pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la suite I_n est positive et décroissante.

Ainsi, $\forall n \geqslant 1$, $1 \geqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \geqslant \frac{I_{n+1}}{I_{n-1}} = \frac{n}{n+1}$ et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$.

Mais, d'après ce qui précède, $1 = \lim\limits_{p\to+\infty} \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = \lim\limits_{p\to+\infty} \frac{\left(4^p (p!)^2\right)^2}{\left((2p-1)!\right)^2 (2p+1)} \frac{2}{\pi}$ et donc,

$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sim \frac{4^p (p!)^2}{(2p-1)!\sqrt{2p+1}}$, d'où en appliquant la formule de Stirling $\sqrt{2\pi} \sim S$.

BIBLIOGRAPHIE

[Fra 07] FRANCINOU SERGE, GIANELLA HERVÉ et NICOLAS SERGE. Exercices de mathématiques, oraux x-ens, vol. Algèbre 01. Cassini, 2007.

[LF 72] LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS . Cours de Mathematiques, vol. Tome 2 : Analyse. Dunod, 1972.