230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Sauf mention contraire, $K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de K.

I/ Convergence d'une série

1) Généralités [ARN] p.62

déf 1: La série de terme général u_n, notée $\sum u_n$, est la suite de terme général $S_n=\sum_{k=0}^{n} u_k$. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée suite des sommes partielles. Si cette suite converge, on dit alors que la série converge, on note $S=\lim_{n\to+\infty} S_n=\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et on définit la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de K, où $R_n=S-S_n$, appelée suite des restes de la série $\sum u_n$. $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est le reste d'ordre n. Sinon on dit que la série $\sum u_n$ diverge.

exemple: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = 1-\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

prop 2: Pour que $\sum u_n$ converge, il faut que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

c-exemple: $\sum_{k=0}^{n} \log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \log(n+1)$

Théorème 3: On appelle série géométrique une série de terme général az^n, où $a\neq 0$ et $z\in K^*$ appelé raison de la série. Si $|z|\geq 1$, la série $\sum az^n$ diverge et $S_n \underset{+\infty}{\sim} az^n$. Si $|z|<1$, la série converge, $S=\frac{a}{1-z}$ et $R_n = a\frac{z^{n+1}}{1-z}$.

exemple: $\frac{1}{\ell} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\ell+1)^n}$

prop 4: L'ensemble des suites (u_n) telles que la série $\sum u_n$ converge forme un K-espace vectoriel. L'application $(u_n)\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est une forme linéaire.

exemple: Si $u_n=a_n+ib_n$ alors $\sum u_n$ converge $\iff$ $\sum a_n$ et $\sum b_n$ cvg.

2) Critère de Cauchy - Convergence absolue [ARN] p.66+69

Théorème 5: $\sum u_n$ converge si et seulement si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

exemple: Série harmonique: $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. $S_{2n}-S_n \geq \frac{1}{2}$ donc diverge. [ARN] p.259

On a $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \log(n)$.

déf 6: $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ converge.

prop 7: L'ensemble des suites dont la série converge absolument est un K-espace vectoriel noté $\ell_1(K)$.

Théorème 8: Toute série absolument convergente est convergente.

exemple: $u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (segments emboîtés $[S_{2n};S_{2n+1}]$)

prop 9: Si $(u_n)\in \ell_1(K)$ alors $|R_n| \leq \sum_{k\geq n+1} |u_k|$.

déf 10: Une série qui converge sans être absolument convergente est appelée semi-convergente.

II/ Séries à termes réels positifs

Dans cette partie $K=\mathbb{R}$ et $u_n, v_n \in \mathbb{R}_+$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

1) Comparaison de séries [ARN] p.67→69 + 447→453

Théorème 11: $\sum u_n$ converge si et seulement si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

exemple: $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\leq 3$. On note $e=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$. On a $n!S_n \leq n!e \leq n!S_n+\frac{1}{n}$ d'où e est irrationnel. [COM] p.67

Théorème 12: Premier théorème de comparaison

Soit (u_n), (v_n) deux suites de $\mathbb{R}_+$ tq $u_n\leq v_n$. On note S_n (resp. σ_n) la suite des sommes partielles de (u_n) (resp. (v_n)) et R_n (resp. ρ_n) la suite des restes de (u_n) (resp. (v_n)) si elle existe.

- $\sum v_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum u_n$ converge et $R_n \leq \rho_n$.
- $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum v_n$ diverge et $S_n \leq \sigma_n$.

Théorème 13: Série de Riemann: Soit $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$. Si $\alpha\leq 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge et si $\alpha>1$, cette série converge.

application: Le thm 13 permet de définir la fonction $\zeta :]1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $s \longmapsto \zeta(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$ appelée fonction zêta de Riemann.

Théorème 14: Second théorème de comparaison (notation thm 12)

Soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$

a) Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

b) En cas de convergence, $R_n \underset{+\infty}{\sim} \rho_n$.

c) En cas de divergence, $S_n \underset{+\infty}{\sim} \sigma_n$.

prop 15 : Soit $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ une série de Riemann ($\alpha \in \mathbb{R}_+^*$).
Si $\alpha > 1$ alors $R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$. Si $\alpha < 1$ alors $S_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$
et si $\alpha = 1$ alors $S_n \underset{+\infty}{\sim} \log(n)$.

exemple : Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n)$. On note $\gamma := \lim_{n\to+\infty} S_n$ appelé constante d'Euler. On a alors $\sigma_n = \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Remarque 16 : Le reste $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ d'une série de Riemann convergente vérifie $\frac{1}{n^\alpha} = o(R_n)$, on dit que les séries de Riemann convergent lentement.
Le reste d'une série géométrique de raison $q \in]0,1[$ vérifie $R_n = O(\sup_{k \geq n}(u_k))$, on dit que la série converge rapidement.

Théorème 17 : Comparaison à une série de Riemann.
S'il existe $\alpha > 1$ tel que $(n^\alpha u_n)_n$ est majorée alors $\sum u_n$ converge,
s'il existe $\alpha \in]0;1[$ tel que $(n^\alpha u_n)_n$ est minorée par un réel > 0 alors la série $\sum u_n$ diverge.

exemple : Formule de Stirling : $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

2) Règles usuelles de convergence [ARN] p. 457

Théorème 18 : Règle de Cauchy : $\limsup_n (u_n)^{1/n} < 1 \Rightarrow \sum u_n$ cvg
$\limsup_n (u_n)^{1/n} > 1 \Rightarrow \sum u_n$ dvg

prop 19 : Si $\limsup (u_n)^{1/n} < 1$ alors soit $q \in]S;1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(u_n)^{1/n} \leq q \;\forall n \geq n_0$ alors $R_n \leq \frac{q^{n+1}}{1-q} \;\forall n \geq n_0$.

Théorème 20 : Règle de D'Alembert : $\limsup \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Rightarrow \sum u_n$ cvg
$\limsup \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Rightarrow \sum u_n$ dvg

exemple : La série de terme général $u_n = n^\alpha q^n$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $q \in]0;1[$
alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} q$ donc la série converge.

prop 21 : Si $\limsup \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors soit $q \in]S;1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q \;\forall n \geq n_0$ alors $R_n \leq u_n \frac{q}{1-q} \;\forall n \geq n_0$.
La convergence est donc rapide, au sens de la remarque 16.

prop 22 : D'Alembert $\Rightarrow$ Cauchy : Si $L := \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ alors $(u_n)^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$

Théorème 23 : Règle de Raabe-Duhamel : Soit $\alpha_n = n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \;\forall n \geq 1$.
Si $\liminf \alpha_n > 1$ alors la série $\sum u_n$ cvg.
Si $\limsup \alpha_n < 1$ alors la série $\sum u_n$ dvg.

3) Comparaison Séries-intégrales [ARN] p. 468

prop 24 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ décroissante alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ et la série $\sum_n f(n)$ sont de même nature [ARN] p. 411

exemple : Série de Bertrand : $\sum \frac{1}{n \log^\alpha n}$ converge si $\alpha > 1$, diverge pour $\alpha \in]0;1]$.

Théorème 25 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ décroissante telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ converge. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.
On a alors l'encadrement, valable $\forall n \in \mathbb{N}$. $\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(x)\,dx$

exemple : Pour calculer $\zeta(2)$ avec une marge d'erreur $\leq 10^{-3}$
Il n'est pas utile de calculer S_{1000}, il suffit de calculer S_{23} et de prendre pour valeur approchée la moyenne arithmétique des valeurs par défaut et par excès obtenues pour $S_n + R_n$.

Théorème 26 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction décroissante et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$. Si $\sum u_n$ diverge alors $S_n \underset{+\infty}{\sim} \int_0^n f(x)\,dx$.

III] Séries à termes quelconques

1) Séries alternées [ARN] p. 474

déf 27 : On appelle série alternée toute série de l'un des types $\sum (-1)^n u_n$ ou $\sum (-1)^{n+1} u_n$, où $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in \mathbb{R}_+$.

Théorème 28 : Critère spécial des séries alternées.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_+$ telle que u_n décroît vers 0.
Alors $\sum (-1)^n u_n$ converge.
De plus, $|R_n| \leq u_{n+1} \;\forall n \in \mathbb{N}$.

[???] **exemple**: $\arctan(x)=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ donc $|R_N|\leq\frac{x^{2N+1}}{2N+1}$

$\frac{\pi}{4}=\arctan 1 \Longrightarrow 500$ itérations pour une précision de 10^{-3}.
$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$ (admis) $\Longrightarrow$ 3 itérations pour 10^{-3}.

2) Transformation d'Abel [ARN] p.477

déf 29: Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites de $\mathbb{K}$. Effectuer une transformation d'Abel sur la série $\sum u_n v_n$ c'est écrire : $\sum_{k=0}^{n}u_kv_k=s_nv_n+\sum_{k=0}^{n}s_k(v_k-v_{k+1})$ où $s_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$.

Théorème 30: Avec les notations de la déf 29, chacune des conditions suivantes est suffisante pour que la série $\sum u_nv_n$ converge :
a) (s_n) bornée, $(v_n)\subset\mathbb{R}_+^*$ et $v_n\searrow 0$
b) $\sum u_n$ converge, $(v_n)\subset\mathbb{R}_+^*$ et décroissante
c) (s_n) bornée, $v_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et $\sum|v_n-v_{n+1}|$ converge.

3) Séries entières : [GOU] p.236-252

déf 31: On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_nz^n$ où $z\in\mathbb{C}$ et $(a_n)\subset\mathbb{C}$.

lemme 32 (lemme d'Abel): Soit $z_0\in\mathbb{C}$ tq la suite $(a_nz_0^n)_n$ soit bornée, alors : $\forall z\in\mathbb{C}, |z|<|z_0|$, la série $\sum a_nz^n$ est absolument convergente

déf 33: Le nombre $R=\sup\{r\geq 0 \mid$ la suite $(|a_n|r^n)$ est bornée$\}$ s'appelle le rayon de convergence de la série $\sum a_nz^n$.

proposition 34: D'après le lemme d'Abel, $\forall z\in\mathbb{C}, |z|<R$, $\sum a_nz^n$ converge. $\forall z\in\mathbb{C}, |z|>R$, $\sum a_nz^n$ diverge. Pour $|z|=R$, la série peut ou non converger. $D=\{z\in\mathbb{C}, |z|<R\}$ est appelé disque de convergence de $\sum a_nz^n$.

Théorème 35: Théorème d'Abel angulaire
Soit $\sum a_nz^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1 telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de la série entière sur le disque unité. On fixe $\theta_0\in[0;\frac{\pi}{2}[$ et on pose $\Delta_{\theta_0}=\{z\in\mathbb{C}, |z|<1$ et $\exists\rho>0, \exists\theta\in]-\theta_0;\theta_0[, z=1-\rho e^{i\theta}\}$
Alors $\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}}f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$.

Théorème 36: Théorème taubérien faible.
Soit $\sum a_nz^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et f la somme de cette série sur le disque unité. On suppose qu'il existe $S\in\mathbb{C}$ tel que $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=S$. Si $a_n=o(\frac{1}{n})$ alors $\sum a_n$ converge et $S=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$. DEV 1

4) Produit de deux séries [ARN] p.486

déf 37: On appelle série-produit des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série $\sum w_n$ où $w_n=\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ appelé produit de convolution des suites (u_n) et (v_n).

Théorème 38: Soit (u_n) et $(v_n)\in\ell_1(\mathbb{K})$ alors la série-produit $\sum w_n$, où $w_n=\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, est absolument convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty}w_n=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}v_n\right)$.

proposition 39: La série-produit des séries entières $\sum a_nz^n$ et $\sum b_nz^n$ a un rayon de convergence $R''\geq\inf\{R,R'\}$, où R (resp. R') est le rayon de convergence de $\sum a_nz^n$ (resp. $\sum b_nz^n$). [GOU] p.237

Théorème 40: Nombres de Bell [Xens] p.12
Soit B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments
Alors $B_n=e^{-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}$ DEV 2

5) Exemples d'utilisation des séries numériques en probabilités [ZQ] p.524-527

Théorème 41: Kolmogorov
Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Si $\mathbb{E}[X_n]=0$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{E}[X_n^2]$ converge alors $\sum_{n=1}^{+\infty}X_n$ converge p.s.

Application: Loi forte des grands nombres ;
lemme: Soit $x\geq 0$ et $S(x)=\sum_{\substack{n\geq x\\ n\geq 1}}\frac{1}{n^2}$ alors $S(x)\leq\frac{8}{x}$

lemme de Kronecker: Soit $(z_n)_n\subset\mathbb{C}$ et $(\lambda_n)_n\subset\mathbb{R}_+^*$ tel que $\lambda_n\nearrow+\infty$
Si $\sum\frac{z_n}{\lambda_n}$ converge alors $\lim_{n\to+\infty}\frac{z_1+\dots+z_n}{\lambda_n}=0$.

Théorème: Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite v.a.r. i.i.d. intégrables, sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ alors $(\frac{1}{n}\sum X_i)_n$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}[X]$.

[ARN] : J.M. ARNAUDIÈS, H. FRAYSSE   Cours de mathématiques - 2 Analyse   DUNOD

[GOU] : X. GOURDON   Analyse 2e édition - les maths en tête   ELLIPSES

[ZQ] : H. Queffélec C. Zuily   Analyse pour l'agrégation 3ème édition   DUNOD

[COM] : J. COMBES   Suites et séries   PUF

[Xens] : S. FRANCINOU, H. Gianella, S. Nicolas   Exercices de mathématiques - Oraux X-ens - algèbre 1   CASSINI

Théorème d'Abel angulaire et théorème taubérien faible

Mathias Malandain et Thomas Pigné

8 décembre 2016

1 Théorème d'Abel angulaire

Théorème 1. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1, et telle que la série $\sum a_n$ converge. On note f la somme de la série entière sur le disque ouvert $\mathcal{D}(0;1)$ et on fixe $\theta_0 \in [0; \frac{\pi}{2}[$. Soit :*

$$\Delta_{\theta_0} = \mathcal{D}(0;1) \cap \left\{1 - \rho e^{i\theta} | \rho \in \mathbb{R}_+^*, \theta \in [-\theta_0; \theta_0]\right\}$$

alors $\displaystyle\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Démonstration. On note $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$ la somme partielle et $R_N = S - S_N$ le reste correspondant. Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N &= a_0 + \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n) z^n - \left(a_0 + \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n \left(z^{n-1} - 1\right) - \sum_{n=1}^{N} R_n (z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n \left(z^{n-1} - z^n\right) - R_N \left(z^N - 1\right) \\
\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N &= (z-1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N \left(z^N - 1\right)
\end{aligned}$$

Par passage à la limite : $f(z) - S = (z-1) \sum_{n=0}^{\infty} R_n z^n$ (car $z^N - 1$ est borné sur Δ_{θ_0} et R_N tend vers 0).

- Pour tout ϵ strictement positif, il existe un entier naturel N qui vérifie : $\forall n > N, |R_n| < \epsilon$. Alors :

$$|f(z) - S| \leq |z-1| \left(\left| \sum_{n=0}^{N} R_n z^n \right| + \epsilon \sum_{n=N+1}^{\infty} |z|^n \right)$$

$$|f(z) - S| \leq |z-1| \sum_{n=0}^{N} |R_n| + \epsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}$$

- Soit $z = 1 - \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in [-\theta_0; \theta_0]$. On a :

$$|z|^2 = \left(1 - \rho e^{i\theta}\right)\left(1 - \rho e^{-i\theta}\right) = 1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2$$

On a $\cos\theta \geq \cos\theta_0$ et, quand z tend vers 1, ρ tend vers 0 ; pour $\rho \leq \cos\theta_0$, c'est-à-dire z suffisamment proche de 1, on obtient :

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = (1+|z|)\frac{|z-1|}{1-|z|^2} \leq \frac{2}{2\cos\theta - \rho} \leq \frac{2}{\cos\theta_0}$$

- On peut choisir $\alpha > 0$ assez petit pour que $\sum\limits_{n=0}^{N} |R_n| < \frac{\epsilon}{\alpha}$; alors, pour z tel que $|z-1| \leq \alpha$, on a :

$$|f(z) - S| \leq \alpha\frac{\epsilon}{\alpha} + \frac{2\epsilon}{\cos\theta_0} = \epsilon\left(1 + \frac{2}{\cos\theta_0}\right)$$

d'où le résultat.

□

2 Théorème taubérien faible

Théorème 2. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et f sa somme sur $\mathcal{D}(0;1)$. On suppose qu'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = S$.*

Si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors la série $\sum a_n$ est convergente et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = S$.

Démonstration. On note $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n$. Pour $x \in]0;1[$, on a :

$$S_N - f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{N} a_n\left(1 - x^n\right) - \sum_{n>N} a_n x^n$$

Or $(1-x^n) = (1-x)\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k \leq n(1-x)$ (car $0 < x < 1$). D'où :

$$|S_N - f(x)| \leq (1-x)\sum_{n=0}^{N} n\,|a_n| + \sum_{n>N} |a_n|\,x^n \leq (1-x)\sum_{n=1}^{N} n\,|a_n| + \sum_{n>N} \frac{n}{N}\,|a_n|\,x^n$$

Par hypothèse, $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc il existe un réel M majorant la suite $\left(n\,|a_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$. En outre, $\sum\limits_{n>N} x^n \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x^n = \frac{1}{1-x}$. Ainsi, on obtient :

$$|S_N - f(x)| \leq (1-x)MN + \frac{1}{N(1-x)}\sup_{n>N}\left(n\,|a_n|\right)$$

- Soit $\epsilon \in]0;1[$ quelconque ; en substituant x, on a :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \left|S_N - f\left(1 - \frac{\epsilon}{N}\right)\right| \leq \epsilon M + \frac{1}{\epsilon}\sup_{n>N}\left(n\,|a_n|\right)$$

  Comme $n\,|a_n|$ tend vers 0 en l'infini, il existe un entier positif N_0 tel que $\sup\limits_{n>N_0}\left(n\,|a_n|\right) < \epsilon^2$, alors on obtient :

$$\forall N \geq N_0, \quad \left|S_N - f\left(1 - \frac{\epsilon}{N}\right)\right| \leq (M+1)\epsilon$$

- Par hypothèse (et par continuité de f), $\lim\limits_{N\to+\infty} f\left(1 - \frac{\epsilon}{N}\right) = S$, donc :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall N \geq N_1, \quad \left|f\left(1 - \frac{\epsilon}{N}\right) - S\right| \leq \epsilon$$

  Par inégalité triangulaire, on obtient enfin :

$$\forall N \geq \max\left(N_0, N_1\right), \quad |S_N - S| \leq \left|S_N - f\left(1 - \frac{\epsilon}{N}\right)\right| + \left|f\left(1 - \frac{\epsilon}{N}\right) - S\right| \leq (M+2)\epsilon$$

  d'où le résultat.

□

Référence : X. Gourdon *"Les maths en tête : Analyse"*, 2^e édition, Ellipses, 2008.

Nombres de Bell

Mathias Malandain et Thomas Pigné

8 décembre 2016

Théorème 1. *Pour tout entier n, on note B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments (réduit à $\varnothing$ pour $n = 0$). On a alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}$$

Démonstration. Nous avons choisi de mettre en évidence les quatre étapes distinctes de la démonstration.

Relation de récurrence : Pour n fixé et pour tout entier k inférieur ou égal à n, on note E_{k+1} l'ensemble des partitions de $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ dont la partie contenant e_{n+1} est de cardinal égal à $k+1$. L'ensemble E des partitions de $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ est la réunion disjointe des E_k ; ainsi :

$$B_{n+1} = \mathrm{Card}\,(E) = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{Card}\,(E_k)$$

De plus, un élément de E_{k+1} est une partition de $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ déterminée de façon unique par la donnée, d'une part des k éléments de $\{e_1, \ldots, e_n\}$ qui sont dans la même partie que e_{n+1}, et d'autre part d'une partition de l'ensemble des $n-k$ éléments restants ; on dénombre ainsi les éléments de E_{k+1} :

$$\forall k \in [\![0; n]\!],\quad \mathrm{Card}\,(E_{k+1}) = \binom{n}{k}B_{n-k}$$

On en déduit la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$$

Majoration : Prouvons par récurrence que pour tout n entier naturel, on a $B_n \leq n!$.

- Pour $n = 0$, on a $B_0 = 1 = 0!$ par convention ; on peut également initialiser la récurrence pour $n = 1$: comme il existe une seule partition d'un ensemble à un élément, on vérifie $B_1 = 1 = 1!$.
- Supposons qu'il existe un entier naturel n vérifiant : $\forall k \in [\![0; n]\!],\quad B_k \leq k!$. D'après ce qui précède, on a :

$$B_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k! = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!}$$

Or $\forall k \in [\![0; n]\!],\quad \frac{1}{(n-k)!} \leq 1$, d'où $B_{n+1} \leq (n+1)!$, ce qui conclut la preuve par récurrence.

Étude d'une série entière : Soit la série entière $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{B_n}{n!}x^n$. La suite de terme général $\frac{B_n}{n!}$ est bornée d'après ce qui précède, donc, par le lemme d'Abel, le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{B_n}{n!}x^n$ est au moins égal à 1.

On note f sa somme, qui définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1; 1[$. Calculons sa dérivée sur $]-1; 1[$, en réutilisant la formule de récurrence sur les B_n :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n\geq 0} \frac{B_{n+1}}{n!} x^n \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \right) \\
&= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \times \frac{1}{(n-k)!} \right) x^n \\
&= \left(\sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} x^n \right) \left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n \right) \\
f'(x) &= \exp(x) f(x)
\end{aligned}$$

On reconnaît lors de l'avant-dernière égalité le produit de Cauchy de deux séries entières de rayon de convergence supérieur ou égal à 1, donc le calcul est valable sur $]-1;1[$. Il existe donc un réel λ tel que $f(x) = \lambda \exp(\exp(x))$ sur $]-1;1[$, et comme $f(0) = B_0 = 1$, on a $\lambda = \frac{1}{e}$.

/!\

Réécriture de f en série entière sur $\mathcal{D}(0,1)$: Pour $z \in \mathcal{D}(0,1)$, $\exp(z)$ est bien défini, et comme le développement en série entière de la fonction exponentielle est de rayon de convergence infini, on peut écrire :

Se. formelle –

$$\begin{aligned}
\exp(\exp(z)) &= \sum_{k\geq 0} \frac{(\exp(z))^k}{k!} \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{(\exp(kz))}{k!} \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \left(\sum_{n\geq 0} \frac{(kz)^n}{n!} \right) \\
\exp(\exp(z)) &= \sum_{k\geq 0} \sum_{n\geq 0} \frac{(kz)^n}{k!\, n!}
\end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{k\geq 0} \sum_{n\geq 0} \left| \frac{(kz)^n}{k!\, n!} \right| = \exp(\exp(|z|)) < +\infty$$

On peut donc appliquer la formule d'interversion de Fubini, ce qui donne :

$$\exp(\exp(z)) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \sum_{k\geq 0} \frac{k^n}{k!}$$

On a ainsi :

$$\forall x \in]-1;1[, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} x^n = \frac{1}{e} \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \sum_{k\geq 0} \frac{k^n}{k!}$$

Par unicité du développement de f en série entière sur $]-1;1[$, on conclut :

$$\forall n \in \mathbb{N}, B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$$

□

Référence : X. Gourdon *"Les maths en tête : Analyse"*, 2e édition, Ellipses, 2008.