230

Séries de nombres réels et complexes. Comportement des restes et des sommes partielles des séries numériques. Exemples

# I. Premières définitions

**Définition 1.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On appelle série de terme général $(u_n)_n$, noté $\sum_{n\geq 0} u_n$ la suite des sommes partielles $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$

**Définition 2.** La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite convergente si la suite des sommes partielles converge. Dans ce cas on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite.

**Remarque 3.** Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[+\infty]{} 0$ (la réciproque n'est pas vraie). Si $u_n$ ne converge pas vers 0 la suite est grossièrement divergente.

**Exemple 4.**

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à support fini $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge
- Soit $r\in\mathbb{C}$, si $|r|<1$ $\sum_{n\geq 0} r^n$ converge $\frac{1}{1-r}$

  Sinon $\sum_{n\geq 0} r^n$ diverge grossièrement
- $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ converge vers $e$
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $\sum_{n\geq 0}(u_{n+1}-u_n)$ converge.

**Définition 5.** La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite absolument convergente si $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge.

**Proposition 6.** Toute série numérique absolument convergente converge.

**Définition 7.** Une série convergente, non absolument convergente est dite semi-convergente.

# II Critère de convergence

## a) Critère pour les séries positives

**Proposition 8.** Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux séries de réels positif alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

**Proposition 9.** Soit $f: [0,+\infty[ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue par morceaux décroissante alors $\sum_{n\geq 0} f(n)$ converge ssi $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

**Exemple 10.** $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ ; où $\alpha\in\mathbb{R}$ converge ssi $\alpha>1$. (Série de Riemann). d'où $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ ; $\alpha\in\mathbb{C}$ converge absolument ssi $\mathrm{Re}(\alpha)>1$.

**Proposition 11.** Soit $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ deux suites de réels positifs alors.
- Si $u_n = O(v_n)$ ; $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge
- Si $u_n \sim v_n$ $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

**Exemple 12.** $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge ssi $\alpha>1$ ou $\alpha=1$ et $\beta>1$ (Série de Bertrand)

**Proposition 13** (Règle de d'Alembert).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de termes positifs, tels que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l$ alors
- si $l<1$ $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge
- si $l>1$ $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

**Exemple 14.** $\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{n^n}$ converge. Si $u_n = \frac{1}{n}$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$ et $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge. Si $v_n = \frac{1}{n^2}$ $\frac{v_{n+1}}{v_n} \to 1$ et $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge

**Proposition 15.** (Règle de Cauchy). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de terme strict. positif tq $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ alors

- $l<1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ converge
- $l>1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ diverge grossièrement.

**Proposition 16.** Soit $(u_n)_n$ une suite de termes strict positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

alors
- $a>1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ converge
- $a<1 \Rightarrow \sum u_n$ diverge.

si de plus $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, alors $\alpha=1$ $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge et $u_n \sim \frac{1}{n^\alpha}$

**Exemple 17.** Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est défini par $u_0 = 1$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$ alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge ssi $b-a>1$.

## b) Autres critères de convergence

**Proposition 18.** (Critère des séries alternées). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels tels que

- $|u_n| \to 0$ en décroissant
- $(-1)^n u_n$ de signe constant.

alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

**Exemple 19.** $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ convergent.

**Proposition 20.** (Transformation d'Abel). Soit $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites de nombres complexes. alors

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) S_k + a_n S_n$$

où $S_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.

**Proposition 21.** Soit $(\varepsilon_n)_n$ et $(u_n)_n$ deux suites de nombres complexes tels que ($\sum_{n\geq 0} \varepsilon_n$ soit bornée

$\sum_{k\geq 0} |u_{k+1} - u_k|$ converge alors $\sum_{n\geq 0} \varepsilon_n u_n$ converge.

**Exemple 22** $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}}$ converge.

**Proposition 23.** Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoire, indépendantes identiquement distribuée; telles que il existe $p\in[0,1]$; $\mathbb{P}(\varepsilon_0 = 1) = p$ et $\mathbb{P}(\varepsilon_0 = -1) = 1-p$

alors
- Si $p = \frac{1}{2}$ $\sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge presque sûrement
- Sinon $\sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n}$ diverge presque sûrement.

DEV. 1

## III Comportement des restes et sommes partielles

**Définition 24.** Soit $\sum u_n$ une série convergente, on définit le reste d'ordre $n$ $R_n = l - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

### a) Majorations classiques des restes

**Proposition 25.** Soit $u_n$ le terme général d'une série absolument convergente. Alors $\left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} |u_k|$

**Proposition 26** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites positives telles que $u_n \leq v_n$ et $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ convergent alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

**Application 27** $e$ est irrationnel.

**Proposition 28.** Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série alternée alors $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

### b) Comportement avec les relations de comparaisons

**Proposition 29.** Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites positives telles que $u_n \sim v_n$ (resp $u_n = O(v_n)$, resp $u_n = o(v_n)$) alors

- Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ (resp $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$ resp $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$)
- Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$ (resp $\sum_{k=0}^{n} u_k = O\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$ $\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$)

### c) Comparaison série-intégrale.

**Proposition 30.** Soit $g$ une fonction $C^1$, strictement positive telle que $\frac{g'(x)}{g(x)} \longrightarrow \mu \in \mathbb{R}$

Posons $C_\mu = \frac{\mu}{1-e^{-\mu}}$ si $\mu \neq 0$ $C_\mu = 1$ si $\mu = 0$

i) Si $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt = +\infty$ $\sum_{k=0}^{n} g(k) \sim C_\mu \int_0^n g(t)\,dt$

ii) Si $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt < +\infty$ $\sum_{k=n+1}^{+\infty} g(k) \sim C_\mu \int_n^{+\infty} g(t)\,dt$.

**Exemple 31.** $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

## IV Utilisation des séries entières

Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $1$.

**Théorème 32** (Tauber faible) Si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\lim_{z\to 1^-} f(z)$ existe alors $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge vers $f(1)$.

**Théorème 33** (Abel) Si $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

**Proposition 34.** (Nombre de Bell) On note $B_n$ le nombre de partition de $\{1,\dots,n\}$ avec $B_0 = 1$, alors

$$B_k = \frac{1}{e} \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$$

DEV