232

Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X)=0$. Exemples.

Cadre : $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. On veut approcher un point a tq $F(a)=0$, en construisant itérativement une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a. on a une idée de a.

Vitesse de convergence

Def 1 : Soit $(x_n)_n$ une suite itérative convergent vers a, $F(a)=0$. On note l'erreur au rang n : $e_n = x_n - a$

- Si $\|e_{n+1}\| \leq L\|e_n\|$, avec $L<1$, la convergence linéaire ou d'ordre 1
- Si $\|e_{n+1}\| \leq q_n \|e_n\|$, avec $q_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$; la convergence est superlinéaire
- Si $\|e_{n+1}\| \leq C\|e_n\|^p$ on dit que la méthode est exponentielle d'ordre p (quadratique pour $p=2$)

I Méthode de point fixe

1) Théorème du point fixe de Picard

Thm 2 : Soit (E,d) un espace métrique complet non vide et $f : E \to E$, fonction k-contractante $(k<1)$, alors f admet un unique point fixe ℓ, et pour tout $x_0 \in E$ la suite des itérées définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a avec
$$\|e_{n+1}\| \leq k\|e_n\| \leq k^{n+1}\|x_0 - \ell\|$$

Appli 3 : En posant $f(x) = x - CF(x)$ où C est une constante non nulle tq f soit contractante.
$F(x)=0 \iff f(x) = x$

Le Thm 2 donne une convergence exponentielle d'ordre 1.

Def 4 : a point fixe de $f \in C(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$. a est dit attractif s'il existe un voisinage V de a tel que $(x_n) = (f^n(x_0))$ cv $\forall x_0 \in V$

Sinon on dit que a est répulsif.

2) Point fixe d'une fonction d'une variable réelle

$f : I \subset \mathbb{R} \to I$ de classe C^1, $a \in I$ tq $f(a) = a$

Suite $(x_n)_n$ tq $\begin{cases} x_0 \in I \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$

Prop 5 • Si $|f'(a)| < 1$, alors a est un point fixe attractif et il existe $I = [a-h, a+h]$ stable par f tel que la suite $(x_n)_n$ converge exponentiellement vers a $\forall x_0 \in I$

• Si $|f'(a)| > 1$, alors a est répulsif et il existe $J = [a-h ; a+h]$, tel que la suite $(x_n)_n$ sort de J à partir d'un certain rang pour tout $x_0 \in J$ différent de a. [Schéma 1]

Rmq : Il peut être difficile de trouver un critère d'arrêt, par exemple si $f'(a)$ "proche" de 1

Ex 6 : $F(x) = x^3 - 4x + 1 = 0$ sur $\mathbb{R} \iff f(x) = \frac{1}{4}(x^3+1) = x$

Etude de F donne 3 solutions a_1, a_2, a_3 tel que $-2,5 < a_1 < -2$; $0 < a_2 < 0,5$; $1,5 < a_3 < 2$.

- Sur $[-2,5 ; -2]$ $f'(x) \geq f'(-2) = 3$
- Sur $[0 ; 0,5]$ $0 \leq f' \leq 0,1875$ → précision à 10^{-9} en 12 itérations
- Sur $[1,5 ; 2]$ $f' \geq f'(1,5) = 1,6875$

→ a_2 attractif, $\forall x_0 \in [0 ; 0,5]$, $\lim_{n\to\infty} x_n = a_2$

→ a_1 et a_3 sont répulsifs pour f mais attractifs pour $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{4x-1}$, contractante au voisinage de ces points.

3) Point fixe de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Def 7 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le rayon spectral de A, noté $\rho(A)$, est le plus grand module des valeurs propres de A.

Thm 8 : Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$, $a \in \Omega$ un point fixe de f. Il y a équivalence entre :

i) $\exists I$ un voisinage fermé, et N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $f_{|I}$ soit contractante pour N

ii) $\rho(f'(a)) < 1$

Dans ce cas a est un point attractif

II Méthodes usuelles pour les fonctions d'une variable réelle

1) Méthode de dichotomie

Thm 9 : $f : I \to \mathbb{R}$ continue, $a, b \in I$ tq $a<b$ et $f(a)f(b)<0$ alors il existe $\alpha \in [a,b]$, $f(\alpha)=0$.

Appli 10 Sous les mêmes conditions, construisons $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que $a_0 = a$, $b_0 = b$ et

- Si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) f(a) > 0$, $a_n = \frac{a+b}{2}$ et $b_n = b_0$
- Si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) f(a) < 0$, $a_n = a_0$ et $b_n = \frac{a+b}{2}$

On itère l'opération sur $]a_n ; b_n[$, ..., les suites $(a_n), (b_n)$ ainsi construite convergent vers α, tel que $f(\alpha)=0$

À la $n^{ème}$ itération on a une valeur approchée de α avec $\|e_n\| \leq \frac{b-a}{2^n}$.

Ex 11 : $f(x) = x^2 - 2 = 0$ sur $[1 ; 1,5]$

$a_0 = 1$; $b_0 = 1,5$ // $a_1 = 1,25$ et $b_1 = 1,5$ // $a_2 = 1,375$ et $b_2 = 1,5$

$a_3 = 1,1875$ et $b_3 = 1,5$ // $a_4 = 1,34375$ et $b_4 = 1,5$

$a_5 = 1,34375$ et $b_5 = 1,421875$ $\to$ 5 itérations une décimale de juste $\Rightarrow$ convergence lente

2) Méthode de Newton

(schéma 2)

Idée : a racine de f, on veut approcher f par sa tangente

Thm 12 : $f : [c;d] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(c) < 0 < f(d)$ et $\forall x \in [c,d]$, $f'(x) > 0$; alors il existe $r > 0$ tel que toute suite $(x_n)_n$ définie par $\begin{cases} x_0 \in [a-r, a+r] \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$

a une convergence d'ordre 2 vers a

où a est l'unique zéro de f sur $[c,d]$

Ex 13 $f(x) = x^3 - 4x + 1 = 0$ $x_{n+1} = \frac{2x_n^3 - 1}{3x_n^2 - 4}$

x_0	-2	0	2
x_1	$-2,125$	$0,25$	$1,875$
x_2	$-2,114975450$	$0,254038361$	$1,860978520$
x_3	$-2,114907545$	$0,254101688$	$1,860805877$
x_4	$-2,114907541$	x_3	$1,860805853$
x_5	x_4		x_4

$\Rightarrow$ précision 10^{-3} en 3 ou 4 itérations

Ex 14 : $f(x) = x^2 - 2 = 0$

$x_0 = 1$ // $x_1 = 1,5$ // $x_2 = 1,4166666666$ // $x_3 = 1,414215686\,28$ //

$x_4 = 1,414213562\,38$ précision à 10^{-10} en 4 itérations

Cor 15 : $P(x) = (x - \xi_1)^{m_1} \dots (x - \xi_n)^{m_n}$ $\xi_1 < \dots < \xi_n$ $m_i \geq 1$

$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)} \\ x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$ Soit $x_0 > \xi_n$

$\to$ si $m_n = 1$ $|x_n - \xi_n| = o(c^n) \; \forall c > 0$

$\to$ si $m_n > 1$ $|x_n - \xi_n| \sim c\left(1 - \frac{1}{m_n}\right)^n$

3) Méthode de la sécante

on approche $f'(x_n)$ par $\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$ (schéma 3)

Thm 16 : f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I = [x_0, x_1]$, où x_0, x_1 sont des approximations de a racine de f tq $x_0 < a < x_1$. Supposons qu'il existe $m, M > 0$ tels que $\forall x \in I$ $|f'(x)| \geq m$ et $|f''(x)| \leq M$. Alors

Alors f admet une racine unique α dans I, de plus avec β une racine de la sécante $L(x) = \frac{f(x_1)(x - x_0) - f(x_0)(x - x_0)}{x_1 - x_0}$

on a $|\alpha - \beta| \leq \frac{M}{2m} |\beta - x_0||\beta - x_1|$

Ex 17 : $F(x) = x^2 - 2 = 0$

$x_0 = 1{,}5$ // $x_1 = 1{,}4$ // $x_2 = 1{,}41379310345$ //

$x_3 = 1{,}4142156862 8$ // $x_4 = 1{,}41421356206$ //

$x_5 = 1{,}41421356237$ $\Rightarrow$ 5 itérations

III Méthodes pour les fonctions $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

1) Cas affine

$F(x) = Ax - b = 0$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Résoudre $F(x) = 0$ revient à résoudre $Ax = b$.

a) On décompose $A = M - N$ avec M inversible et on définit la suite $(x_n)_n$ par $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{n+1} = M^{-1}(Nx_n + b) \end{cases}$

Prop 18 : $\rho(M^{-1}N) < 1 \iff (x_n)$ converge vers a solution de $F(a) = 0$.

Ex 19 $A = D - E - F$ où D diagonale de A, $-E$ partie inférieure de A, $-F$ partie supérieure de A

Méthode	M	N
Jacobi	D	$E + F$
Relaxation (Gauss Seidel $\omega = 1$)	$\frac{1}{\omega} D - E$	$\frac{1-\omega}{\omega} D + F$

Prop 20 • Si A est à diagonale strictement dominante la méthode de Jacobi converge
• Si A est symétrique définie positive, alors la méthode de relaxation converge $\forall \omega \in]0, 2[$

b) Algorithme du gradient à pas optimal

A symétrique définie positive réelle
Résoudre $F(x) = Ax - b = 0$ revient à minimiser $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ $\langle , \rangle$ produit scalaire euclidien.

Soit (x_n) la suite définie par $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{n+1} = x_n + \rho_{n+1} d_n \end{cases}$

où $d_n = -\nabla f(x_n) = b - Ax_n$ (plus grande pente)
et ρ_{n+1} est le pas optimal i.e. tel que

$$f(x_n + \rho_{n+1} d_n) = \min_{\alpha > 0} f(x_n + \rho d_n)$$

Thm 21 : L'algorithme du gradient converge vers la solution $\bar{x}$ du système $F(x) = 0$

Prop 22 : Si $\|x_0 - \bar{x}\|$ est valeur propre de A, 1 seule étape est nécessaire.

Cex 23 $A = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} & \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \\ \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} & \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) Méthode de Newton Raphson

Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $a \in \Omega$ tq $F(a) = 0$. Soit x_0 une approximation de a. On va approcher F par sa partie linéaire :

$$F(x) = F(x_0) + DF(x_0)(x - x_0) + O(\|x - x_0\|)$$

et on résout $F(x_0) + DF(x_0)(x - x_0) = 0$
Si $DF(x_0)$ inversible, on a $x_1 = x_0 + DF(x_0)^{-1}(F(x_0))$
On pose donc $x_{n+1} = x_n + DF(x_n)^{-1}(F(x_n))$

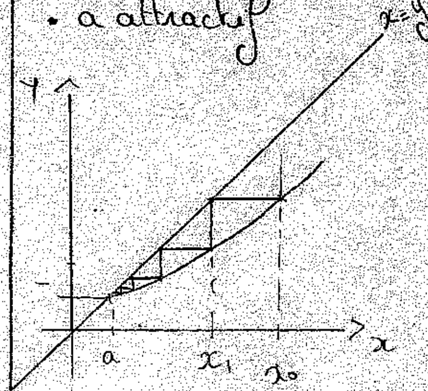
Thm 24 : Si $DF(a)$ est inversible, alors il existe un voisinage V de a tel que $\forall x_0 \in V$ $(x_n)_n$ converge vers a

Ex 25 : $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 4 \\ xe^x + ye^y = 0 \end{cases}$

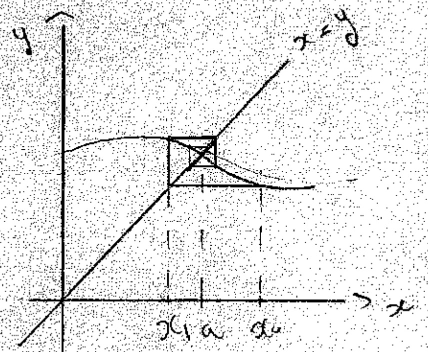
e	x_e	y_e
0	-2	$0{,}2$
1	$-2{,}130690993$	$0{,}265937784$
2	$-2{,}126935837$	$0{,}206277868$

Schéma 1 point fixe

• a attractif

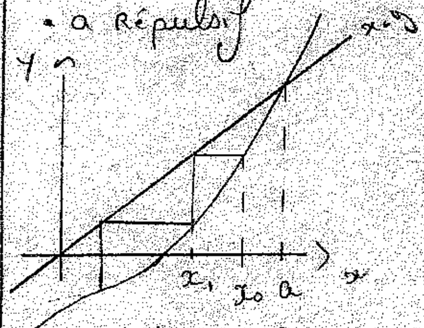


$0<g(a)<1$

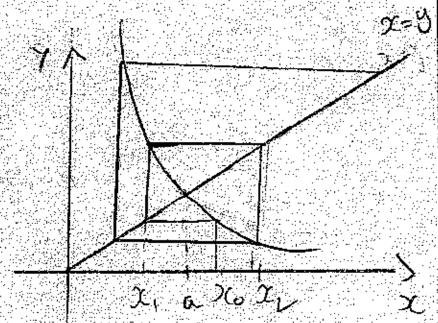


$-1<g(a)<0$

• a répulsif



$g'(a)>1$



$g'(a)<-1$

Schéma 2 Newton

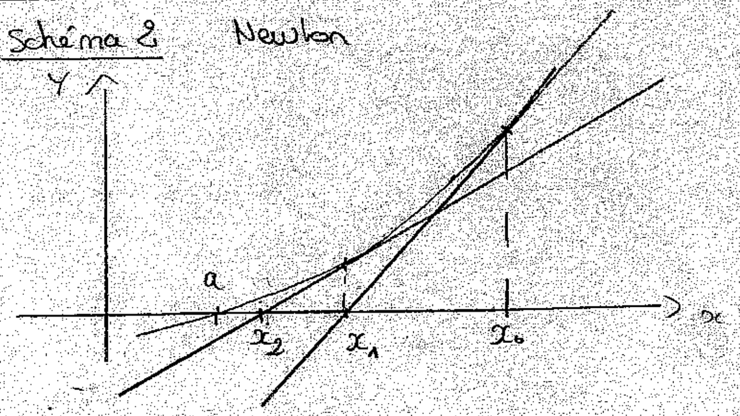
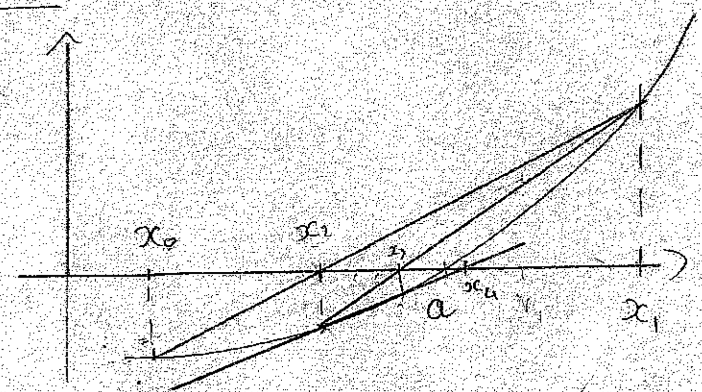


Schéma 3 Sécante



Biblio:

- Ramis Warusfel Moulin
- Oraux X ENS Analyse 1
- Demailly
- Ciarlet
- Pommelet

Schatzman Analyse Numérique