232 Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $f(X)=0$. Exemples

Introduction

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Le but est de trouver une approximation de a tel que $f(a)=0$ en construisant une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a.
Il faut d'abord être sûr d'avoir un a vérifiant que $f(a)=0$

Théorème 1 (Théorème des valeurs intermédiaires) TVI
Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $b,c\in\mathbb{R} \mid f(b)f(c)\leq 0$ alors il existe $a\in[b,c]$ tel que $f(a)=0$

Méthode 2 (Dichotomie) $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $b,c\in\mathbb{R}$.
On suppose $f(b)\geq 0$, $f(c)\leq 0$. Soit alors $(x_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que
- $x_0^+ = b$, $x_0^- = c$
- $\forall n\geq 1$, $\tilde{x} = \frac{x_{n-1}^+ + x_{n-1}^-}{2}$
  - Si $f(\tilde{x})\leq 0$, $x_n^+ = x_{n-1}^+$ $x_n^- = \tilde{x}$
  - Sinon, $x_n^- = x_{n-1}^-$, $x_n^+ = \tilde{x}$.

Définition 3 (Vitesse de convergence)
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers a, et $\forall n\in\mathbb{N}$, $e_n = x_n - a$
- Si $\|e_{n+1}\|\leq L\|e_n\|$, $L<1$ la convergence est d'ordre 1
- Si $\|e_{n+1}\|\leq c\|e_n\|^p$, $p\geq 1$, la convergence est d'ordre p
- Si $\|e_{n+1}\|\leq q_n\|e_n\|$, $q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, la convergence est superlinéaire

Rq : la méthode par dichotomie donne une convergence linéaire

I Fonctions d'une variable réelle

1) Méthode de la fausse position :

La méthode est la même que la dichotomie, sauf que on pondère $x_{n-1}^{\pm}$ par $\frac{1}{f(x_{n-1}^{\pm})}$ dans le calcul de $\tilde{x}$.
Schéma 1

Théorème 4 La convergence de cette méthode est super-linéaire

Exemple 5 $f(x)= x^2-2$ sur $[1, 1,5]$

Dichotomie	1,25	1,375	1,4375	1,40625
Fausse position :	1,4	1,41379	1,41420...	1,4142132...

2) Méthode de Newton

On veut approcher f par sa tangente. Schéma 2

Méthode 6 $f\in\mathcal{C}^2([c,d],\mathbb{R})$, $f(c)<0<f(d)$ et $\forall x\in[c,d]$, $f'(x)>0$
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
- $x_0\in[c,d]$
- $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Proposition 7 Si $a\in[c,d]$ tel que $f(a)=0$, $\exists r>0$ tel que
Si $x_0\in\,]a-r, a+r[$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une convergence d'ordre 2 vers a.

Exemple 8 : $f(x)= x^3-4x+1$: $x_{n+1} = \frac{2x_n^3-1}{3x_n^2-4}$

x_0	-2	0	2
x_1	-2,125	0,25	1,875
x_2	-2,114975450	0,254038361	1,860978520
x_3	-2,114907545	0,254101688	1,860805877
x_4	-2,114907541		1,860805853

Cas particulier des polynômes : DVPT

3) Méthode de la sécante :

La méthode de Newton nécessite de connaître la dérivée de notre fonction. Sinon, on peut appliquer la méthode de la sécante : $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\cdot\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$

Théorème 9 Si f est $\mathcal{C}^2(I)$ et $\exists m, M>0 \mid \forall x\in I$, $m\leq|f'(x)|\leq M$:
alors la convergence est super-linéaire.

Rq : Cette méthode est semblable à celle de la fausse position, à la différence qu'on conserve simplement les deux dernières valeurs, sans souci d'encadrement de la racine.

II Méthode générale : point fixe

De manière générale, la suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par une fonction F dépendant de f. Le point a vers lequel converge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc un point fixe de F.

Rq : dans la méthode de Newton, $F : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

1) Fonction contractante, point attractif

Théorème 10 : Soit (E,d) un espace métrique complet non vide et $F : E \to E$ une fonction K-contractante $(K<1)$ alors F admet un unique point fixe a, et pour tout $x_0 \in E$, la suite définie par $x_{n+1} = F(x_n)$ converge vers a. On a :

$$\|e_{n+1}\| \leq K\|e_n\| \leq K^{n+1}\|e_0\|$$

Application 11 On pose $F_c : x \mapsto x - c f(x)$ où c est une constante telle que F soit contractante. On a alors une convergence linéaire

Définition 12 (Point attractif)
Soit a un point fixe de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, a est attractif s'il existe un voisinage V de a tel que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a, pour tout $x_0 \in V$.
Sinon, a est répulsif

2) Cas particulier des fonctions d'une variable réelle

cadre : $F : I \subset \mathbb{R} \to I$, $\mathcal{C}^1$, $a \in I$ point fixe, $\begin{cases} x_0 \in I \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$

Proposition 13 • Si $|f'(a)| < 1$, a est un point fixe attractif et il existe $h > 0$ tel que $\forall x_0 \in [a-h, a+h]$, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, la convergence linéaire
• Si $|f'(a)| > 1$, a est répulsif et il existe $h > 0$ tel que $\forall x_0 \in [a-h, a+h]$, $x_0 \neq a$, alors $\exists n \mid x_n \notin [a-h, a+h]$

Exemple 14 $f(x) = x^3 - 4x + 1$ soit $F(x) = \frac{1}{4}(x^3+1) = x$
Il y a 3 points fixes $-2{,}5 < a_1 < -2$ $\quad 0 < a_2 < 0{,}5$ $\quad 1{,}5 < a_3 < 2$
• $f'(a_1) \geq f'(2) = 3$ • $f'(a_3) \geq f'(1{,}5) = 1{,}6875$ $\Rightarrow$ points répulsifs
• $0 \leq f'(a_2) \leq 0{,}1875$ soit une précision à 10^{-3} en 12 itérations

Remarque : F^{-1} est contractante au voisinage des points a_1 et a_3

III Fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

1) Point fixe, rayon spectral

Définition 15 (Rayon spectral) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le rayon spectral de A, $\rho(A)$ est le plus grand module des valeurs propres de A

Théorème 16 Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^1$, $a \in \Omega$ point fixe de f. Il y a équivalence entre
(i) $\exists I$ voisinage fermé, N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que f_I soit contractante pour N
(ii) $\rho(f'(a)) < 1$
Dans ce cas, a est un point fixe attractif.

On peut donc utiliser la méthode avec point fixe.

2) Méthode de Newton Raphson

Il s'agit d'étendre la méthode de Newton aux dimensions supérieures
Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^2$, $a \in \Omega \mid f(a) = 0$

Méthode 17 : $x_0 \in \Omega$, $x_{n+1} = x_n + Df(x_n)^{-1} f(x_n)$

Théorème 18 Si $Df(a)$ est inversible, il existe $V \in \mathcal{V}_a \mid \forall x_0 \in V$, $x_n \longrightarrow a$

3) Recherche des valeurs propres

Propriété 19 : La recherche des valeurs propres d'une matrice symétrique réelle est bien conditionnée

4) Inversion de matrice   Résoudre $Ax=b$

a) $A = M-N$, M inversible et on définit la suite itérative
$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{n+1} = M^{-1}(Nx_n + b) \end{cases}$$

Proposition 20 : Si $\rho(M^{-1}N) < 1$, x_n converge vers $A^{-1}b$

Exemple : $A = D-E-F$ | D est la diagonale de A, $-E$ la partie triangulaire inférieure, $-F$ la partie triangulaire supérieure

Méthode	M	N
Jacobi	D	$E+F$
Relaxation	$\frac{1}{\omega}D-E$	$\frac{1-\omega}{\omega}D+F$

Proposition 21 • Si A est à diagonale strictement dominante, la méthode de Jacobi converge

• Si A est symétrique définie positive, la méthode de relaxation converge pour $\omega \in]0,2[$

b) Algorithme du gradient à pas optimal

Soit $A \in S_n^{++}$

Résoudre $Ax=b$ revient à minimiser
$f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle - \langle b,x\rangle$.

On procède par itérations successives en suivant la ligne de plus grande pente

Théorème 22 L'algorithme du gradient à pas optimal converge linéairement, la vitesse de convergence dépend du conditionnement de la matrice A

DEVELOPPEMENT

IV Accélération de convergence

On présente une méthode générale pour accélérer la convergence d'une suite :

Méthode d'Aitken

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergent vers $a \in \mathbb{R}$

Si $\exists k \in \mathbb{R}$, $|k|<1$, et $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ tels que $\forall n \geq 0$,
$$x_n \neq a \text{ et } x_{n+1} - a = (k+\varepsilon_n)(x_n - a)$$

On pose $y_n = x_n - \dfrac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}$

Proposition 23

y_n est défini pour n assez grand et converge plus vite que x_n vers a

Méthode de Steffensen

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, a un point fixe de f, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par x_0 et

$\forall n \geq 0$, on pose $y_n = f(x_n)$, $z_n = f(y_n)$

et $x_{n+1} = x_n - \dfrac{(y_n - x_n)^2}{z_n - 2y_n + x_n}$

Proposition 24

La méthode de Steffensen converge même si a est un point fixe répulsif de f

La convergence est superlinéaire

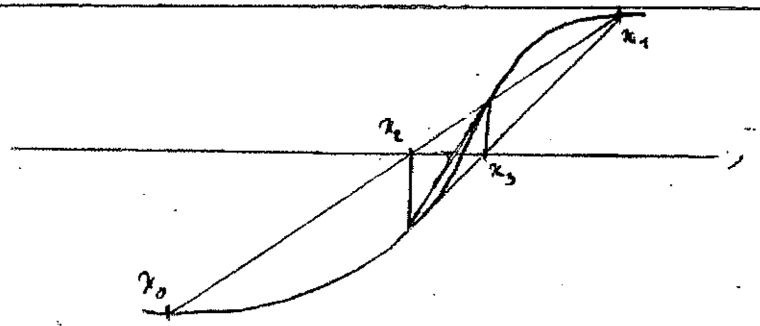

Schéma 1 : méthode de la fausse position

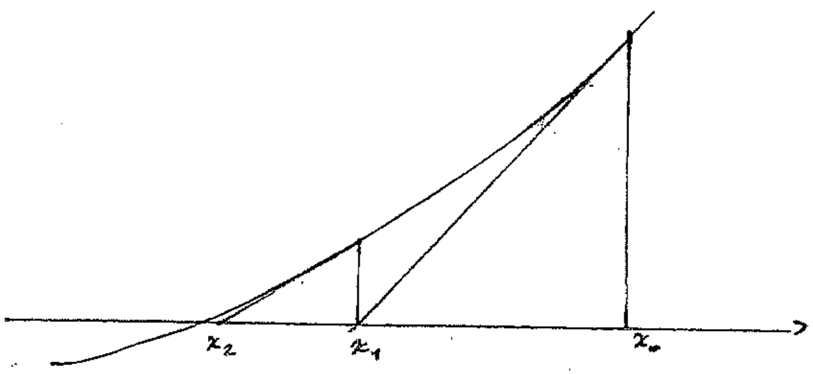

Schéma 2 : méthode de Newton

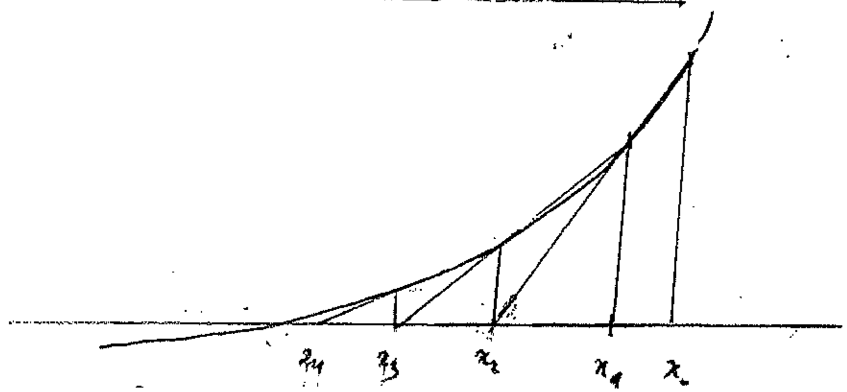

Schéma 3 : méthode de la sécante

Références :

Demailly
Pommelet
Chambert Loir
Hiriart Urruty

Développement : méthode de Newton pour les polynômes.

On rappelle l'énoncé de la méthode de Newton "standard" :

Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\forall x \in [c,d]\ f'(x) > 0$

Alors, si $f(c) < 0 < f(d)$, f admet un unique zéro a et la suite (x_n) définie par $\begin{cases} x_0 \in [c,d] \\ x_{n+1} = \cancel{f}\, x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$ converge quadratiquement vers a et est à valeurs dans $[c,d]$.

Théorème : Soit $\xi_1 < \dots < \xi_r$ des réels ; $(m_1, \dots, m_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ et $P = \prod_{i=1}^{r} (X - \xi_i)^{m_i}$

Alors, si (x_n) est définie par $\begin{cases} x_0 \in]\xi_r ; +\infty[\\ x_{n+1} = F(x_n) \end{cases}$, où $F = Id - \dfrac{P}{P'}$, on a :

i) (x_n) décroît strictement vers ξ_r

ii) si $m_r = 1$, la convergence est quadratique

iii) sinon, il existe $\alpha > 0$ tel que $x_n - \xi_r \sim \alpha \left(1 - \dfrac{1}{m_r}\right)^n$

Preuve : i)

P, P' et P'' ont leurs zéros dans $[\xi_1, \xi_r]$ et leurs coefficients dominants positifs, donc sont positifs sur $I =]\xi_r, +\infty[$.

Or, $F' = 1 - \left(\dfrac{P'^2 - PP''}{P'^2}\right) = \dfrac{PP''}{P'^2}$

donc F est croissante sur I et se prolonge par continuité par ξ_r en ξ_r

(On notera $F(\xi_r) = \xi_r$)

d'où $F(I) \subset I$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in I$ donc $\dfrac{P(x_n)}{P'(x_n)} > 0$ et $x_{n+1} < x_n$

(x_n) décroît donc strictement vers un $\ell \in \overline{I}$

$F(\ell) = \ell$ donc $\ell = \xi_r$, d'où i).

ii) ; Soit $[c,d]$ voisinage compact de ξ_r tel que $F'|_{[c,d]} > 0$

(il existe car F' est continue et $F'(\xi_r) > 0$ car $m_r = 1$)

Soit $l \in \mathbb{N}$ tel que $x_l \in [c,d]$

Alors (méthode de Newton) $(x_{l+n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge quadratiquement vers ξ_r, donc (x_n) aussi.

iii) On suppose $m_r > 1$, Calculons $F'(\xi_r)$ (prolongement par continuité)

Par dérivation logarithmique, $\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{X-\xi_i}$

donc $$\frac{P'^2 - PP''}{P^2} = +\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{(X-\xi_i)^2}$$

i.e. $$\left(\frac{P'}{P}\right)^2 \cdot (1-F') = +\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{(X-\xi_i)^2}$$

et $$F' = 1 - \left[\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{(X-\xi_i)^2}\right]\left[\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{X-\xi_i}\right]^{-2}$$

$$F'(\xi_r) = 1 - \frac{1}{m_r}$$

Or, d'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1

$x_{n+1} - \xi_r = F'(y_n)(x_n - \xi_r)$ pour un $y_n \in [\xi_r, x_n]$

donc ~~x_n~~ $\exists c < 1$, $x_n - \xi_r = o(c^n)$ (il suffit de choisir $c \in]1-\frac{1}{m_r}, 1[$)

et, à l'ordre 2 :

$x_{n+1} - \xi_r = F'(\xi_r)(x_n - \xi_r) + F''(z_n)(x_n - \xi_r)^2$ avec $z_n \in [\xi_r, x_n]$

donc, si $\varepsilon_n = \dfrac{x_{n+1} - \xi_r}{F'(\xi_r)(x_n - \xi_r)} - 1$, on a $\varepsilon_n = O(x_n - \xi_r) = o(c^n)$

donc $\displaystyle\sum_n \ln(1+\varepsilon_n)$ converge vers un réel λ

et $\displaystyle\prod_{i=1}^{+\infty}(1+\varepsilon_n) = e^{\lambda}$

i.e. $$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_{\cancel{n+1}} - \xi_r}{F'(\xi_r)^n (x_0 - \xi_r)} = e^{\lambda}$$

et $x_n - \xi_r \sim e^{\lambda}(x_0 - \xi_r)\left(1 - \dfrac{1}{m_r}\right)^n$, d'où iii).