II - RESOLUTION DE SYSTEMES LINEAIRES

Résoudre $Au = b$, $A \in Gl_n(\mathbb{C})$, $b \in \mathbb{C}^n$.

Trouver $B \in M_n(\mathbb{C})$ et $c \in \mathbb{C}^n$ tel que $u = Bu + c$ (et $I-B$ inversible)

Déf 14 La méthode itérative $u_{k+1} = Bu_k + c$ est convergente si $\forall u_0 \in \mathbb{C}^n$, $\lim_{k \to +\infty} u_k = u$

Théorème 15 : On a équivalence entre

(i) La méthode est convergente

(ii) $\rho(B) < 1$

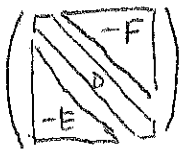
(iii) $\|B\| < 1$ pour au moins une norme matricielle.

Théorème 16 : $\lim_{k \to +\infty} \sup_{\|u_0 - u\| = 1} \|u_k - u\|^{\frac{1}{k}} = \rho(B)$.

Méthode : $A = M - N$ avec $M \in Gl_n(\mathbb{C})$ de sorte que

$$Au = b \iff u = \underbrace{M^{-1}N}_{B}u + \underbrace{M^{-1}b}_{c}$$

On décompose $A = D - E - F$ =



Méthode de Jacobi

Ici la matrice d'itération est $J = D^{-1}(E+F)$ de sorte que $Du_{k+1} = (E+F)u_k + b$

Méthode de Gauss-Seidel

Ici la matrice d'itération est $\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1}F$ et

$$(D-E)u_{k+1} = Fu_k + b$$

Méthode de Relaxation (avec $\omega \neq 0$)

Ici la matrice d'itération est $\mathcal{L}_\omega = \left(\frac{D}{\omega} - E\right)^{-1}\left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)$ et donc

$$\left(\frac{D}{\omega} - E\right)u_{k+1} = \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)u_k + b$$

Théorème 17 Si A est hermitienne définie positive et $A = M - N$ avec $M \in Gl_n(\mathbb{C})$ telle que $(M^* + N)$ est hermitienne définie positive, alors

$$\rho(M^{-1}N) < 1$$

Théorème 18 Si A est hermitienne définie positive, la méthode de relaxation converge si $0 < \omega < 2$

Théorème 19 : On a toujours $\rho(\mathcal{L}_\omega) \geq |\omega - 1|$ donc si la méthode de relaxation converge, $0 < \omega < 2$.

Prop 20 : Si A est tridiagonale, $\rho(\mathcal{L}_1) = \rho(J)^2$

Prop 21 : Si A est hermitienne définie positive, tridiagonale, alors les 3 méthodes convergent (si $0 < \omega < 2$). De plus $\omega_0 = \dfrac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(J)^2}}$ est tel que

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_0}) = \inf_{0<\omega<2} \rho(\mathcal{L}_\omega) = \omega_0 - 1 < \rho(\mathcal{L}_1) < \rho(J)$$

si $\rho(J) \neq 0$.

Ex 22 : La matrice du laplacien discret

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

est hermitienne définie positive.

233 - METHODES ITERATIVES EN ANALYSE NUMERIQUE MATRICIELLE

I- ANALYSE NUMERIQUE MATRICIELLE

1) Normes Matricielles

Théorème 1 : L'aplication $|||.||| : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $|||A||| = \sup_{\substack{v \in \mathbb{C}^n \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|}{\|v\|}$ est une norme qui dépend de la norme $\|.\|$ choisie sur $\mathbb{C}^n$.

Elle vérifie $|||AB||| \leq |||A||| \, |||B|||$

Exemple 2, pour les normes $\|.\|_p$ sur $\mathbb{C}^n$,

$$|||A|||_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

$$|||A|||_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

Déf 3 : Rayon spectral de $A \in M_n(\mathbb{C})$

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$$

Ex 4 : $|||A|||_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$

Si A est hermitienne, $|||A|||_2 = \rho(A)$

Théorème 5 :

(i) Pour toute norme matricielle, $\rho(A) < \|A\|$

(ii) Pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\epsilon > 0$, il existe une norme subordonnée telle que $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$

Théorème 6

Si $\|.\|$ est subordonnée et $\|B\| < 1$ alors $I+B$ est inversible et $\|(I+B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|B\|}$

Théorème 7

Les conditions suivantes sont équivalentes

(1) $\lim_{k \to +\infty} B^k = 0$

(2) $\lim_{k \to +\infty} B^k v = 0$ pour tout $v \in \mathbb{C}^n$

(3) $\rho(B) < 1$

(4) $\|B\| < 1$ pour une norme subordonnée

Appli 8 Si $\|.\|$ est une norme matricielle

$$\lim_{k \to +\infty} \|B^k\|^{1/k} = \rho(B)$$

2) Conditionnement

Def 9 Pour une norme subordonnée $\|.\|$,

$$cond(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\| \qquad (A \in GL_n(\mathbb{C}))$$

Théorème 10 Si $A \in GL_n(\mathbb{C})$, $u, b, \delta u, \delta b \in \mathbb{C}^n$, et $Au = b$, $A(u+\delta u) = b + \delta b$ avec $b \neq 0$ alors

$$\frac{\|\delta u\|}{\|u\|} \leq cond(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

Théorème 11 Si $Au = b$ et $(A+\Delta A)(u+\Delta u) = b$ alors

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u+\Delta u\|} \leq cond(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

Ex 12

- $Cond_2(A) = \sqrt{\frac{\lambda_n(A^*A)}{\lambda_1(A^*A)}}$ où $|\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_n|$ sont les valeurs propres.
- Si A est normale, $Cond_2(A) = \frac{|\lambda_n(A)|}{|\lambda_1(A)|}$
- Si A unitaire ou orthogonale, $Cond_2(A) = 1$

Prop 13

- $Cond(A) \geq 1$
- $Cond(A^{-1}) = Cond(A) = Cond(\alpha A) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$

III - RECHERCHE DE VALEURS PROPRES

1) Méthode QR

Théorème 23 Si $A \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe une unique matrice Q unitaire et une unique matrice R triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs tels que

$$A = QR.$$

Méthode $A_1 = A$ et $A_{k+1} = R_k Q_k$ où $A_k = Q_k R_k$ est la décomposition QR de A_k.

Théorème 24 : Si $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n| > 0$, et si P^{-1} admet une factorisation LU, alors la suite A_k converge vers D.

2) Méthode de puissance

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ a une valeur propre de module maximal λ_1 de multiplicité p avec

$$|\lambda_1| = \dots = |\lambda_p| > |\lambda_{p+1}| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

On pose $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_0 = \frac{y_0}{\|y_0\|_\infty}$

$$y_{k+1} = Ax_k \quad \text{et} \quad x_{k+1} = \frac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|_\infty}$$

Théorème 25 Si $x_0 \notin \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I)^\perp$ alors (x_k) converge vers un vecteur propre associé à λ_1 et $(\|Ax_k\|_\infty)$ converge vers $|\lambda_1|$

IV - Optimisation

Théorème 26 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On suppose qu'il existe $a \in I$, $f(a) = 0$, $f'(a) > 0$. Alors la suite

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ est définie et converge quadratiquement vers a pour x_0 assez proche de a.

DVPT 1

(Cette méthode se généralise en dimension supérieure)

Prop 27 Si A est symétrique définie positive, résoudre $Ax = b$ revient à minimiser

$$J(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$$

Pour minimiser J, on utilise des méthodes de gradient :

Gradient à pas optimal

$$u_{k+1} = u_k - \rho_k \nabla J(u_k)$$ où ρ_k minimise $\rho \mapsto J(u_k - \rho \nabla J(u_k))$

alors (u_k) converge vers le minimiseur de J.

Gradient conjugué $(A \in S_n^{++}(\mathbb{R}))$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \quad \text{avec} \quad {}^t d_k A d_{k+1} = 0$$

et α_k minimise $\alpha \mapsto J(x_k + \alpha d_k)$

alors il existe $n_0 \in [\![0, n]\!]$ tel que $x_{n_0} = x^*$ où $Ax^* = b$.

DVPT 2

Méthode de Newton

Théorème . Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On suppose qu'il existe $a \in I$ tel que $f(a) = 0$ et $f'(a) > 0$. Alors la suite définie par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

est définie et converge quadratiquement vers a pour x_0 assez proche de a.

Preuve :
f' est continue en a donc il existe $h > 0$ tel que f' ne s'annule pas sur $\overline{B(a,h)}$. On considère la fonction F définie sur $\overline{B(a,h)}$ par

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

On a

$$F(x) - a = \frac{(x-a)f'(x) - f(x) + f(a)}{f'(x)}.$$

Par l'inégalité de Taylor-Lagrange en x, on sait que

$$|f(a) - f(x) - (a-x)f'(x)| \leq \frac{\sup_{B(a,h)} |f''|}{2} |x-a|^2.$$

En posant $M := \dfrac{\sup_{B(a,h)} |f''|}{2 \inf_{B(a,h)} |f'|}$, bien définie car f' est continue et ne s'annule pas sur $B(a,h)$, on a

$$|F(x) - a| \leq M|x-a|^2.$$

On pose $r = \inf \left\{ h, \dfrac{1}{M} \right\}$ et on prend $x_0 \in B(a,r)$:

$$M|x_{n+1} - a| \leq (M|x_n - a|)^2 \leq \ldots \leq (M|x_0 - a|)^{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Théorème . Si de plus f est convexe et $f'(a) > 0$, alors la suite $(x_n)_n$ converge vers a pour tout $x_0 \in J := I \cap [a, +\infty[$.

Preuve :
f étant convexe, sa dérivée est croissante : $\forall x \in J, f'(x) \geq f'(a) > 0$. Ainsi, pour $x_0 \in J$ quelconque, on a

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \leq x_n.$$

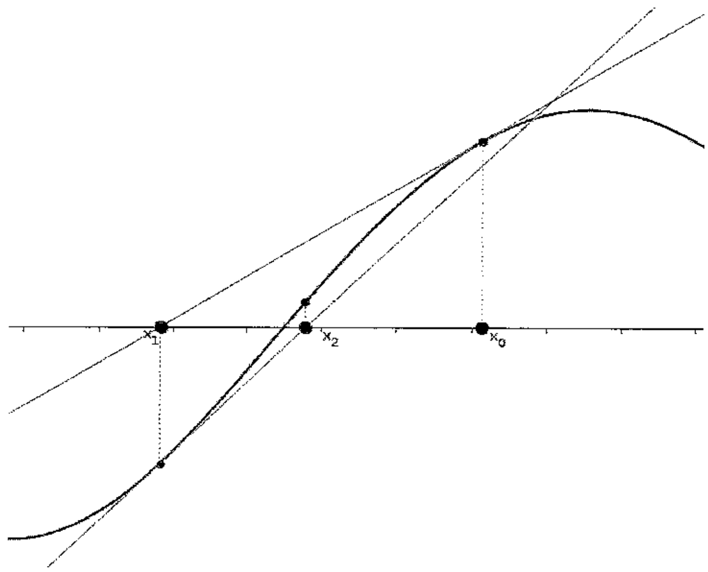
En particulier, la suite $(x_n)_n$ est définie et strictement décroissante ou constante à a. Par l'égalité de Taylor-Lagrange, il existe $y_n \in [a, x_n]$ tel que

$$x_{n+1} - a = \frac{f''(y_n)}{f'(x_n)}(x_n - a)^2.$$

La suite $(x_n)_n$ est à valeurs dans le compact $[a, x_0]$. Ses seules valeurs d'adhérences sont les points fixes de F. a étant l'unique point fixe de F, $(x_n)_n$ converge vers a. La convergence est encore quadratique.

□

Remarque La méthode de Newton vient avant tout d'une vision géométrique. La formule $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ peut être écrite sous la forme $f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0$. x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection entre l'axe (Ox) avec la tangente en x_n.



Méthode du gradient conjugé

On se propose d'étudier une méthode de descente particulière, celle du gradient conjugé. Le problème est, pour $b \in \mathbb{R}^n$ et $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive, de résoudre le système linéaire $Ax = b$. Ce type de systèmes correspond au problème variationnel de minimiser la fonctionnelle définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, J(x) := \frac{1}{2}{}^t xAx - {}^t xb.$$

En effet, soit x^* l'unique solution du système linéaire. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} J(x) - J(x^*) &= \frac{1}{2}{}^t xAx - {}^t xb - \frac{1}{2}{}^t x^* Ax^* + {}^t x^* b \\ &= \frac{1}{2}{}^t xAx - {}^t xAx^* - \frac{1}{2}{}^t x^* Ax^* + {}^t x^* Ax^* \\ &= \frac{1}{2}\left({}^t xAx - 2{}^t xAx^* + {}^t x^* Ax\right) \\ &= \frac{1}{2}{}^t(x - x^*)A(x - x^*) = \frac{1}{2}\|x - x^*\|_A, \end{aligned}$$

avec $\|y\|_A = {}^t yAy$ la norme euclidienne associée à A. Comme pour toute méthode de descente, on part de $x_0 \in \mathbb{R}$ et on va construire x_{k+1} à partir de x_k avec une formule de la forme

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k,$$

d_k étant la direction de descente, et α_k tel que $J(x_{k+1}) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}}\{J(x_k + \alpha d_k)\}$. Un calcul nous assure le lemme suivant.

Lemme . α_k est caractérisé par

$${}^t d_k r_{k+1} = 0,$$

où $r_k = Ax_k - b$ le résidu associé à x_k.

L'idée de la méthode du gradient conjugé, c'est de construire d_{k+1} à partir de d_k de sorte que d_{k+1} et d_k soient A-conjuguées, c'est à dire

$${}^t d_k A d_{k+1} = 0.$$

On choisit $d_0 = -r_0$ comme dans les autres méthodes de gradient et $d_{k+1} = -r_{k+1} + \beta_k d_k$ avec β_k choisi pour vérifier la relation d'orthogonalité entre d_{k+1} et d_k. Si $d_k \neq 0$, il suffit de prendre $\beta_k = \frac{{}^t d_k A r_{k+1}}{{}^t d_k A d_k}$. On doit s'assurer que $d_k \neq 0$ pour pouvoir calculer d_{k+1}. Mais

$${}^t d_k r_k = -{}^t r_k r_k + \beta_{k-1}{}^t d_{k-1} r_k = -{}^t r_k r_k = -\|r_k\|^2$$

par orthogonalité de d_k et r_{k+1}, ainsi $d_k = 0$ implique $r_k = 0$ et donc $x_k = x^*$: on a trouvé la solution. Le point clé de la méthode repose sur le lemme suivant.

Lemme . On a
$$^t r_k r_{k+1} = 0,$$
l'orthogonalité des résidus.

En effet, on a

$$^t r_k r_{k+1} = -^t d_k r_{k+1} + \beta_{k-1} {}^t d_{k-1} r_{k+1} = 0 + \beta_{k-1} {}^t d_{k-1}(r_k + \alpha_k A d_k).$$

Par orthogonalité de d_{k-1} et r_k, il reste

$$^t r_k r_{k+1} = \beta_{k-1} \alpha_k {}^t d_{k-1} A d_k = 0.$$

Théorème . Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe $n_0 \in [\![0,n]\!]$ tel que $x_{n_0} = x^*$. C'est-à-dire, la méthode du gradient conjugé converge vers la solution en au plus n étape.

Preuve :
On montre par récurence que $(r_0,\dots,r_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}^n$. Par construction, on a
$$^t r_k r_{k+1} = 0 \quad \text{et} \quad {}^t d_k r_{k+1} = 0.$$
Ainsi, r_{k+1} est orthogonal au plan engendré par r_k et d_k. Or

$$\beta_k d_{k-1} = d_k + r_k,$$

donc r_{k+1} est orthogonal à d_{k-1} si $\beta_k \neq 0$. Si $\beta_k = 0$, alors

$$0 = {}^t d_{k-1} A r_k = {}^t\left(\frac{r_k - r_{k-1}}{\alpha_{k-1}}\right) r_k = \frac{^t r_k r_k}{\alpha_{k-1}},$$

par orthogonalité de r_k et r_{k-1}, et donc $r_k = 0$ et la méthode est fini. De même, on peut diviser par α_{k-1} car la méthode est fini s'il s'annule.

On a alors r_{k+1} orthogonal à Vect(r_k, d_k, d_{k-1}). On a

$$r_{k-1} = A x_{k-1} - b = A x_k - \alpha_{k-1} A d_{k-1} - b = r_k - \alpha_{k-1} d_{k-1}.$$

Donc r_{k+1} est orthogonal à Vect$(r_k, d_k, d_{k-1}, r_{k-1})$. En itérant, on a bien r_{k+1} orthogonal à Vect$(r_0,\dots,r_k)$, ce qui permet de conclure.

□

Remarque La méthode du gradient à pas conjugé est parfois considérée comme directe parce qu'elle termine en un nombre d'étape fixe. Cependant, cela n'est pas vérifié en pratique à cause des erreurs d'arrondi. Il s'agit donc d'une méthode itérative et c'est comme telle qu'elle est en général codée, avec un test d'arrêt $\|r_k\| \leq \eta$. Dans la pratique, ce test est vérifié pour n_0 bien plus petit que n.