233

Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systèmes linéaires, recherche de vecteurs propres, exemples.

CADRE : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Normes matricielles, rayon spectral, conditionnement

Def 1 : Soit $\|\cdot\|$ une norme vectorielle sur $\mathbb{K}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit la norme subordonnée de A comme $\|A\| = \sup\limits_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Prop 2 : Pour $\|\cdot\|$ une norme subordonnée, on a :
- $\|I_n\| = 1$
- $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$
- $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$

Ex 3 : $\|A\|_1 = \sup\limits_{1 \leq j \leq n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)$; $\|A\|_\infty = \sup\limits_{1 \leq i \leq n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$.

C-ex 4 : $\|A\|_{Fr} = \left(\sum\limits_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ n'est pas une norme subordonnée.

Def 5 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, le rayon spectral de A est le module de sa plus grande valeur propre, et est noté $\rho(A)$.

Ex 6 : $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour rayon spectral 1.

Def 7 : Soit $\|\cdot\|$ un norme matricielle subordonnée, et $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Le conditionnement de A est défini par : $\mathrm{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

Ex 8 : $\mathrm{cond}_\infty \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 9$, où cond_∞ est le conditionnement associé à $\|\cdot\|_\infty$.

Prop 9 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$; $b, \delta b \in \mathbb{K}^n$. Soit x vérifiant $Ax = b$ et $x + \delta x$ vérifiant $A(x+\delta x) = b + \delta b$. Alors $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \mathrm{cond}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$.

Prop 10 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :
- $\forall \alpha \neq 0 \quad \mathrm{cond}(\alpha A) = \mathrm{cond}(A) = \mathrm{cond}(A^{-1})$.
- $\mathrm{cond}_2(A) = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_n}}$ avec $Sp(A^*A) = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ et $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_n \geq 0$
- si $A^*A = AA^*$, $\mathrm{cond}_2(A) = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|} = \rho(A)\rho(A^{-1})$ avec $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ et $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|$.
- si $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie $U^*U = I_n$, alors $\mathrm{cond}_2(U) = 1$.
- pour tout $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $U^*U = I_n$, $\mathrm{cond}_2(AU) = \mathrm{cond}_2(UA) = \mathrm{cond}_2(A)$.

(cond_2 désigne le conditionnement associé à la norme $\|\cdot\|_2$).

II. Résolution approchée de systèmes linéaires

On cherche à résoudre des systèmes d'équations linéaires du type $Ax = b$ où $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $b \in \mathbb{K}^n$.

1. Méthodes de splitting

Def 11 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Une décomposition régulière, ou splitting, de A est un couple de matrices (M, N) avec $M \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A = M - N$. Une méthode itérative basée sur cette décomposition est définie par : $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{K}^n \\ \forall k \in \mathbb{N}^* \quad Mx_{k+1} = Nx_k + b \end{cases}$

Lemme 12 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\rho(A) = \inf\limits_{\|\cdot\| \text{ norme subordonnée}} \|A\|$.

Thm 13 : La méthode itérative associée à la décomposition $A = M - N$ converge si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$.

DEV 1

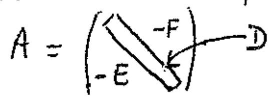
Prop 14 : Si A est hermitienne définie positive et $A = M - N$ une décomposition régulière de A. Alors $(M^* + N)$ est hermitienne. De plus, si $(M^* + N)$ est définie positive, alors $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Def 15 (Jacobi) : Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. On note D la diagonale de A. La méthode de Jacobi est la méthode associée à la décomposition $M = D$, $N = D - A$. On note $J = M^{-1}N = I - D^{-1}A$.

Ex 16 : Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, on a $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Prop 17 : Si A est hermitienne, la méthode de Jacobi converge si A et $2D - A$ sont définies positives.

Def 18 (Gauss-Seidel) : Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. On décompose A sous la forme $A = D - E - F$ où D est la partie diagonale, $-E$ la partie inférieure et $-F$ la partie supérieure de A.



La méthode de Gauss-Seidel est la méthode associée à la décomposition $M = D - E$, $N = F$. On note $G_1 = M^{-1}N = (D-E)^{-1}F$.

Ex 19 : Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, on a $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Prop 20 : Si A est hermitienne définie positive, alors $M^* + N = D$ est aussi hermitienne définie positive, et donc la méthode de Gauss-Seidel converge.

Def 21 (Relaxation): Soit $\omega \in \mathbb{R}^+$. La méthode de relaxation pour le paramètre ω est la méthode associée à la décomposition
$$M = \frac{1}{\omega} D - E \quad , \quad N = \frac{1-\omega}{\omega} D + F.$$
On note $G_\omega = M^{-1}N = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1}\left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)$.

Ex 22: Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, on a $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} & 0 \\ -1 & \frac{2}{\omega} \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} \frac{1-\omega}{\omega} & -1 \\ 0 & 2\frac{(1-\omega)}{\omega} \end{pmatrix}$

Rq. 23: Si $\omega = 1$, on retrouve la méthode de Gauss-Seidel.

Prop 24: Si A est hermitienne définie positive, alors pour tout $\omega \in]0,2[$, la méthode de relaxation converge.

Prop 25: Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\forall \omega \neq 0 \ \rho(G_\omega) \geq |1-\omega|$.
Ainsi, la méthode de relaxation ne converge que si $0 < \omega < 2$.

Rq 26: Pour que les méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et de relaxation soient bien définies, il faut que la matrice D soit inversible, i.e. que les coefficients diagonaux de A soient non nuls.

2. Comparaison des méthodes pour des matrices tridiagonales

Thm 27: Soit A une matrice tridiagonale. On a $\rho(G_1) = \rho(J)^2$.
- Les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel convergent ou divergent simultanément.
- En cas de convergence, la méthode de Gauss-Seidel converge plus vite que celle de Jacobi.

Thm 28: Si A est tridiagonale, hermitienne, définie positive, alors les trois méthodes convergent, et de plus, il existe un unique paramètre optimal $\omega_{opt} \in]0,2[$ pour la méthode de relaxation :
$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1-\rho(J)^2}}.$$

Appli 29 (problème du Laplacien): On considère l'équation $\begin{cases} -u''(x) = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$.
En divisant l'intervalle $[0,1]$ en n intervalles de taille $\frac{1}{n}$, on se ramène à la résolution du système linéaire $A_n x = b$ avec $A_n = n^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_{n-1}) \end{pmatrix}$

où $\{t_0, \dots, t_n\}$ est la subdivision de $[0,1]$ en intervalles de taille $\frac{1}{n}$.

Prop 30: Pour le problème du Laplacien, en fixant un seuil d'erreur $\varepsilon > 0$, le nombre d'itération pour descendre en-dessous de ce seuil est en $O(n^2)$ pour les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel, et en $O(n)$ pour la méthode de relaxation avec le paramètre optimal.

3. Approche géométrique

Résoudre $Ax = b$ équivaut à chercher l'intersection de n hyperplans $(H_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'équation $(Au - b)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j - b_i = 0$, pour $i \in \{1, \dots, n\}$.

Prop 31 (méthode de Kaczmarz): Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors, partant d'un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et en le projetant successivement sur les hyperplans $H_i, i \in \{1, \dots, n\}$, la méthode converge vers la solution de $Ax = b$. **DEV 2**

III. Optimisation

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et $b \in \mathbb{R}^n$. On considère le problème de minimisation de la fonction quadratique $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par :
$$J(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j - \sum_{i=1}^{n} b_i x_i.$$

Prop 32: Le gradient de J en $x \in \mathbb{R}^n$ est $\nabla J(x) = Ax - b$.

Prop 33: Si, de plus, A est définie positive, alors J admet un unique minimum en x_0 qui est la solution de $Ax = b$. Et on a :
$x_0 \in \mathbb{R}^n$ est le minimum de J si et seulement si $\nabla J(x_0) = 0$.

Prop 34: Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla J(x) \neq 0$, alors $\forall \alpha \in]0, \frac{2}{\rho(A)}[$,
$J(x - \alpha \nabla J(x)) < J(x)$.

Cor 35 (méthode du gradient): Pour minimiser J et résoudre $\nabla J(x) = Ax - b = 0$, on construit une suite de points $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tels que la suite $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ soit décroissante en posant : $x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k) = x_k + \alpha(b - Ax_k)$ où $\alpha \in]0, \frac{2}{\rho(A)}[$.

IV. Recherche de valeurs propres et vecteurs propres

1. Calcul de la plus grande valeur propre

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ avec $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|$.

Def 36 (méthode la puissance): Soit $\varepsilon > 0$.
Initialisation : Choisir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x_0\| = 1$.
Itérations : Pour $k \geq 1$ et $\|x_k - x_{k-1}\| \leq \varepsilon$:
$$y_k = A x_{k-1}$$
$$x_k = y_k / \|y_k\|$$
FinPour

Prop 37: En sortant de la boucle, x_k est un vecteur propre approché de A associé à la valeur propre approchée $\|y_k\| \simeq |\lambda_1|$.

Rq 38: En pratique, cette méthode est limitée au calcul de la plus grande valeur propre de A, si cette valeur propre est simple et réelle.

Thm 39: Si la plus grande valeur propre de A (en module) est un réel positif et si elle est simple, alors l'algorithme termine.

C-ex 40: Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, l'algorithme ne s'arrête pas.

2. Calcul des autres valeurs propres

Def 41 (méthode de la puissance inverse): Pour trouver la plus petite valeur propre (en module) et un vecteur propre correspondant, on adapte l'algorithme de la méthode de la puissance : Soit $\varepsilon > 0$.

Initialisation : Choisir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x_0\| = 1$.

Itérations : Pour $k \geq 1$ et $\|x_k - x_{k-1}\| \leq \varepsilon$:

résoudre $Ay_k = x_{k-1}$

$x_k = y_k / \|y_k\|$

FinPour

Prop 42: En sortant de la boucle, x_k est un vecteur propre approché de A associé à la valeur propre approchée $1/\|y_k\| \simeq |\lambda_n|$.

Thm 43: Si A est inversible et diagonalisable, et si sa plus petite valeur propre (en valeur absolue) est simple et strictement positive, alors l'algorithme termine.

Rq 44: Connaissant λ_1 la plus grande valeur propre de A (en module), on peut trouver la suivante en appliquant la méthode de la puissance à $\tilde{A} = A - \lambda_1 I_n$.

3. Vitesse de convergence

Prop 45: • Pour la méthode de la puissance, la vitesse de convergence est proportionnelle à $\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}$: si $x = \lim_{k \to +\infty} x_k$,

$$\|x_k - x\| = \underset{k \to +\infty}{O}\left(\left(\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}\right)^k\right) \quad \text{et} \quad \big|\|y_k\| - |\lambda_1|\big| = \underset{k \to +\infty}{O}\left(\left(\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}\right)^k\right)$$

• Pour la méthode de la puissance inverse, on a, de même :

$$\|x_k - x\| = \underset{k \to +\infty}{O}\left(\left(\frac{|\lambda_n|}{|\lambda_{n-1}|}\right)^k\right) \quad \text{et} \quad \big|\|y_k\|^{-1} - |\lambda_n|\big| = \underset{k \to +\infty}{O}\left(\left(\frac{|\lambda_n|}{|\lambda_{n-1}|}\right)^k\right)$$

Il existe des variantes de la méthode de la puissance afin d'obtenir des algorithmes qui convergent plus rapidement :

Prop 46 (méthode des traces): Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la plus grande valeur propre en module est simple. Alors $(tr(A^m))^{\frac{1}{m}} = \lambda_1 + \underset{m \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{m}\left(\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}\right)^m\right)$.

D'où $\lim_{m \to +\infty} (tr(A^m))^{\frac{1}{m}} = \lambda_1$.

Rq 47: Cette méthode ne permet pas de trouver un vecteur propre associé à la valeur propre λ_1.

4. Une application : le web

Lorsque l'on recherche un document sur le web, on peut se retrouver confronté à un très grand nombre de pages.

Le moteur de recherche Google utilise un algorithme visant à classer ces pages par ordre de pertinence afin de faciliter les recherches.

Cet algorithme consiste à trouver un point fixe de l'application $\begin{vmatrix} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ v \longmapsto Pv \end{vmatrix}$, où P est une matrice stochastique construite en comptant le nombre de liens d'une page i vers une page j.

Cela revient à trouver un vecteur propre de P associé à la valeur propre 1. On peut le calculer avec la méthode de la puissance qui termine grâce au théorème de Perron-Frobenius qui assure que l'on se trouve dans le cadre du théorème 39.

Thm 47 (Perron-Frobenius): Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs. Si A est irréductible, alors :

- A a une valeur propre égale à $\rho(A)$;
- $\rho(A)$ est une valeur propre simple;
- il existe un vecteur propre correspondant à $\rho(A)$ dont toutes les composantes sont strictement positives.

(Admis)

Références :

- *Algèbre linéaire numérique*, G. Allaire, S.M. Kaber
- *Méthodes numériques itératives*, C. Brezinski, M. Redivo-Zaglia