Remarque 30 : La méthode itérative cv ssi $e_k \to 0$, i.e ssi $r_k = Ae_k \to 0$.

Théorème 31 : La méthode itérative converge ssi $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Théorème 32 : On suppose ici A hermitienne, définie positive, (M, N) une décomposition rég. de A. Alors $M^* + N$ est hermitienne. Si de plus $M^* + N$ est définie positive alors $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Exemples 33 :
- $M = D$ la diagonale de A, $N = D - A$ (Jacobi)
- $M = D - E$ où $-E$ est la partie inférieure de A, $N = F$ où $-F$ — — — supérieure — — . (Gauss-Seidel).
- $M = \frac{D}{\omega} - E$, $N = \frac{1-\omega}{\omega} D + F$, $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ (relaxation).

Remarque 34 : Méthode du gradient conjugué : $M = \frac{1}{2} I_n$, $N = \frac{1}{2} I_n - A$.

IV. Recherche, localisation d'éléments propres

$\lambda \in \mathbb{R}^*$

IV.1). Des résultats plutôt théoriques

Déf. 35 : On suppose ici A symétrique réelle. On définit le quotient de Rayleigh pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par $R_A(x) := \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle}$.

Théorème 36 : On suppose de nouveau A symétrique réelle de valeurs propres [redacted] $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. $\forall i \in [\![1, n]\!]$ on a
$$\lambda_i = \min_{\substack{(a_1, \dots, a_{n-i}) \\ \mathbb{R}^n}} \max_{x \perp [a_1, \dots, a_{n-i}]} R_A(x) = \max_{\substack{(a_1, \dots, a_{i-1}) \\ \mathbb{R}^n}} \min_{x \perp [a_1, \dots, a_{i-1}]} R_A(x).$$

Théorème 37 : On suppose A diagonalisable de valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle subordonnée telle que $\|\mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)\| = \max_{1 \leq i \leq n} |d_i|$.

Alors pour toute perturbation matricielle δA les valeurs propres de $(A + \delta A)$ sont contenues dans l'union des $D_i := \{ z \in \mathbb{C},\ |z - \lambda_i| \leq \Gamma(A) \|\delta A\| \}$ où $\Gamma(A) = \inf_{P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} \mathrm{cond}(P)$.

Théorème 38 : On suppose A diagonalisable de valeurs propres réelles $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ associées à des vecteurs propres réels $(e_1, \dots, e_n)$ et que la valeur propre de plus grand module, notée λ_n, est simple positive. On suppose de plus que dans la base des vecteurs propres $x_0 = \sum_{i=1} \beta_i e_i$ avec $\beta_n \neq 0$. Alors la méthode de la puissance converge. I.e $\lim_{k \to +\infty} \|y_k\| = \lambda_n$, $\lim_{k \to +\infty} x_k = x_\infty$ t.q $x_\infty = \pm e_n$.

Remarque 39 : La méthode de la puissance inverse permet de déterminer λ_1.

Exemple 40 : A partir du système $\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \\ u(0) = \alpha \\ u(1) = \beta \end{cases}$ on peut le discrétiser et passer de sa résolution à la résolution d'un système linéaire.

Développements :

1. Résolution du problème aux moindres carrés via la méthode QR.
2. Localisation d'éléments propres via la méthode de Jacobi.

233

Analyse numérique matricielle - Résolution approchée de systèmes linéaires, recherche d'éléments propres, exemples.

I. Algèbre linéaire

I. 1) Définitions et résultats généraux

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, toutes les lettres capitales désignent des matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Déf 1 : Le polynôme caractéristique de A, noté χ_A est défini par $\chi_A := \det(A - XI_n)$.

Déf 2 : Les racines de χ_A sont appelées valeurs propres de A et on appelle spectre de A l'ensemble $Sp(A) := \{\lambda \in \mathbb{C},\ \chi_A(\lambda) = 0\}$.

Déf. 3 : On appelle rayon spectral de A le maximum des modules des valeurs propres de A et on le note $\rho(A)$.

Prop. 4 : Les conditions suivantes sont équivalentes : (i). $\lim_{k \to +\infty} A^k = 0$ (ii). $\rho(A) < 1$.

Déf. 5 : Les applications suivantes sont des normes sur $M_n(K)$: • $\|A\|_q := \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^q\right)^{1/q}$ pour $q \geq 1$ • $\|A\|_\infty := \max_{i,j \in [\![1,n]\!]} |a_{ij}|$

Déf. 6 : On peut associer à toute norme $\|\cdot\|$ sur K^n une norme dite subordonnée et définie par $|||A||| := \sup_{\substack{x \in K^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Prop. 7 : $|||AB||| \leq |||A||| \cdot |||B|||$, c'est une norme d'algèbre (matricielle).

Déf. 8 : On appelle système linéaire le problème consistant à trouver la ou les solution(s) x dans K^n de $Ax = b$ où $b \in K^n$.

Déf. 9 : Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle, on appelle conditionnement de A, relatif à cette norme, la valeur définie par $\mathrm{cond}(A) := |||A|||\ \|A^{-1}\|$.

I. 2) Réduction

Théorème 10 : Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de E, il existe $(y_1, \dots, y_n)$ une famille orthonormale telle que $[y_1, \dots, y_p] = [x_1, \dots, x_p]$ $\forall p \in [\![1, n]\!]$.

Théorème 11 : Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée.

II. Méthodes directes

II. 1) Méthodes standards

Déf. 12 : On appelle méthode directe de résolution du système linéaire $Ax = b$ une méthode qui permet de calculer la solution x en un nombre fini d'opérations.

Théorème 13 : Il existe une matrice inversible M telle que $T = MA$ soit triangulaire supérieure.

Théorème 14 : Supposons que toutes les sous-matrices d'ordre k de A soient inversibles. Il existe un unique couple de matrices (L, U) avec U triangulaire sup. et L triangulaire inf. à diagonale unité, tel que $A = LU$. De plus, $\mathrm{cond}(A) \leq \mathrm{cond}(L)\,\mathrm{cond}(U)$.

Théorème 15 : On suppose ici A symétrique réelle définie positive. Il existe une unique matrice réelle B triangulaire inf., telle que tous ses élts diagonaux soient positifs et qui vérifie $A = BB^*$. De plus, $\mathrm{cond}_2(A) = \mathrm{cond}(BB^*) = \mathrm{cond}(B)^2$.

Théorème 16 : On suppose ici A réelle inversible. Il existe un unique couple (Q, R) où Q est orthogonale et R triangulaire sup. dont tous les élts diagonaux sont positifs, tel que $A = QR$. De plus, $\mathrm{cond}_2(A) = \mathrm{cond}(QR) = \mathrm{cond}_2(R)$.

II. 2). Résolution du problème des moindres carrés

Déf. 17 : Un problème aux moindres carrés consiste à trouver la (ou les) solution(s) $x \in \mathbb{R}^p$ du problème de minimisation suivant : $\|b - Ax\|_n = \min_{y \in \mathbb{R}^p} \|b - Ay\|_n$.

Remarque 18 : Si A est inversible, un problème aux moindres carrés est équivalent à une résolution de système linéaire.

Lemme 19 : Il existe une solution du problème aux moindres carrés ssi elle satisfait à l'équation dite normale $A^*Ax = A^*b$.

Théorème 20 : Il existe au moins une solution de l'équation normale $A^*Ax = A^*b$. Elle est unique ssi $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$.

Prop. 21 : Le vecteur $x = A^+ b$ est solution du problème des moindres carrés. C'est la solution de norme minimale. ($A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$)

Prop. 22 : On suppose $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$. Soient $b_0, b_1 \in \mathbb{R}^n$, x_0 et x_1 les solutions associées au problème des moindres carrés. On a $\frac{\|x_1 - x_0\|_2}{\|x_0\|_2} \le C_b \frac{\|b_1 - b_0\|_2}{\|b_0\|_2}$ où $C_b = \|A^+\|_2 \frac{\|b_0\|}{\|x_0\|}$.

Remarque 23 : • Si $b_0 \in \mathrm{Im}(A)$, $C_b \le \mathrm{Cond}_2(A)$.
• Si $b_0 \in (\mathrm{Im}(A))^\perp$, $C_b = +\infty$.

Prop. 24 : On suppose $\mathrm{Ker}(A_0) = \{0\}$. Soient x_0, x_ε les solutions du problème des moindres carrés de matrice A_0 et A_ε respectivement et de même second membre b. Quand ε tend vers 0 :
$\frac{\|x_\varepsilon - x_0\|_2}{\|x_0\|_2} \le C_{A_0} \frac{\|A_\varepsilon - A_0\|_2}{\|A_0\|_2} + O(\varepsilon^2)$ où $C_A = \mathrm{Cond}_2(A) + \tan(\theta)\,\mathrm{Cond}_2(A)^2$, où $\cos(\theta) = \frac{\|Ax_0\|_2}{\|b_0\|_2}$

Remarque 25 : • Si $b_0 \in \mathrm{Im}(A)$, $C_A = \mathrm{Cond}(A)$ $(\theta = 0)$
• Si $b_0 \in \mathrm{Im}(A)^\perp$, $C_A = +\infty$ $(\theta = \frac{\pi}{2})$.

III. Méthodes itératives III. 1) Méthodes standards

Déf. 26 : On appelle méthode itérative de résolution du système linéaire $Ax = b$ une méthode numérique qui calcule une suite de solutions approchées x_k qui converge vers la solution exacte quand le nombre d'itérations k tend vers $+\infty$.

Déf. 27 : On suppose A inversible. On appelle décomposition régulière de A un couple de matrices (M, N) avec M inversible tel que $A = M - N$. Une méthode itérative basée sur la décomposition rég. (M, N) est définie par $\begin{cases} x_0 \text{ donnée} \\ Mx_{k+1} = Nx_k + b, \ \forall k \ge 1 \end{cases}$

Déf. 28 : On dit qu'une méthode itérative est convergente ssi qq soit le choix de x_0, la suite des x_k cv vers une solution exacte x.

Déf. 29 : On appelle résidu (resp. erreur) à l'itération k le vecteur $r_k = b - Ax_k$. (resp. $e_k = x - x_k$).