Espaces L^p, $1 \leq p \leq +\infty$

234

Cadre : $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré $(\mu \neq 0)$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Généralités

1) Espaces $\mathcal{L}^p$

[BP] p153

Def : • Pour tout $p>0$, on définit le $\mathbb{K}$-ev $\mathcal{L}^p(\mu) = \{ f : (X,\mathcal{A}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ mesurable $/ \int_X |f|^p d\mu < +\infty \}$

On note $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$

• Pour $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, on définit le supremum essentiel de f par

$$\operatorname{supess}(f) = \inf \{ M>0 \,/\, \mu(\{f>M\}) = 0 \}$$

Pour $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{K}$, on note $\|f\|_\infty = \operatorname{supess}(|f|)$ et $\mathcal{L}^\infty(\mu) = \{ f : (X,\mathcal{A}) \to \mathbb{K},\ \|f\|_\infty < +\infty \}$.

Ex : Si m désigne la mesure de comptage,

$$\mathcal{L}^p(m) = \ell^p(\mathbb{N}) := \{ (a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \,/\, \sum_{n\geq 0} |a_n|^p < +\infty \}$$

[BP] p155

Prop : • Inégalité de Hölder

Soient $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ et $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ avec $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

Alors $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

[BP] p157

• Inégalité de Minkowski

Soient $1 \leq p \leq +\infty$, $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, alors

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

2) Espaces L^p

[BP] p160

Pb : $(\mathcal{L}^p(\mu), \|\ \|_p)$ est un ev semi-normé. Il manque la propriété $[\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0]$ pour en faire un ev normé.

Solution : on quotiente par $[f \sim g \Leftrightarrow f = g \ p.p]$.

Def : $L^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu) / \{\|\cdot\|_p = 0\}$ est un $\mathbb{K}$-ev normé.

[Rud] p82

Théorème de Riesz-Fischer :

Pour $1 \leq p \leq +\infty$, $L^p(\mu)$ est un espace de Banach.

3) Inclusions dans les L^p

[BP] p154

Prop : (a) Si $\mu(X) < +\infty$, alors $\forall 0 < p \leq q$, $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$

(b) Si m est la mesure de comptage, alors $\forall 0 < p \leq q \Rightarrow \ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$.

[B-1] p15

Conséquence : Si X est un espace de probas, alors $r \longmapsto \|f\|_r$ est croissante.

Contre-exemple : sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, si $1 \leq p < +\infty$, alors

$f(x) = \dfrac{1}{x^{1/p}(1+\ln^2 x)} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) \in L^p$ mais $\notin L^q$ pour tout $q \neq p$.

4) Convergence dans les espaces L^p

[Rud] p83

Rmq : Dans la preuve de Riesz-Fischer, on montre :

Lemme : $\forall p \in [1, +\infty[$, $\forall (f_n) \in L^p(\mu)^{\mathbb{N}}$, $f \in L^p(\mu)$ tq $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\ \|_p} f$, il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ tq $f_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} f$ μ p.p

[B] p165

Contre-exemple : $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$

$\forall n \geq 0$, $\forall 0 \leq k \leq 2^n - 1$, $f_{2^n+k} = \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[}$

Alors $\|f_n\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Mais $f_n \not\to 0$ μ p.p.

[B] p164

Théorème : Convergence L^p dominée

Soit $(f_n) \in L^p(\mu)$ tq $f_n \to f$ μ pp.

(a) Si $\sup_n \|f_n\|_p < +\infty$, alors $f \in L^p(\mu)$

(b) Si $\exists g \in L^p(\mu)$ tq $\forall n$, $|f_n| \leq g$ μ pp, alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ dans $L^p(\mu)$.

Contre-exemple : sans domination

$f_n = n \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ μ pp et $\forall n$, $\|f_n\|_1 = 1$.

5) Densité dans les L^p

[B] p16

Prop : $\forall 1 \leq p < +\infty$, l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p(\mu)$

[B] p166

Théorème : $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$

a) L'ensemble des fonctions en escalier à support compact est d. dans $L^p(\mu)$, pour $1 \leq p < +\infty$.

b) L'ensemble $\mathcal{C}_K(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\mu)$, pour $1 \leq p < +\infty$.

Application :

$L^1 \cap L^2$ est dense dans L^2 (utile notamment pour le théorème de Fourier-Plancherel)

II) Utilisation des espaces L^p

1) Convolution

But : régulariser des fonctions

Déf : Si f et g sont deux fonctions quelconques, on appelle produit de convolution de f par g, la fonction (si elle est bien définie),

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, g(x-t)\, dt$$

[Bre] p66 Théorème :
Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p \leq +\infty$.
Alors $f*g \in L^p(\mathbb{R})$ et $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$

Pb la convolution par une fonction quelconque de $L^1(\mathbb{R})$ n'apporte pas de continuité.

Mais, on a :

[OA] p116 Prop : Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et $f \in L^p$, $g \in L^q$, alors $f*g$ est bornée, uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

De plus, si $1 < p < +\infty$, $\lim_{|x| \to +\infty} f*g(x) = 0$.

[OA] p117 Prop : Si $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in L^1$, alors $f*g \in C^\infty(\mathbb{R})$.

[Bre] p70 Déf : (suite régularisante)
On appelle suite régularisante toute suite $(\rho_n)_{n \geq 1}$ de fonctions telle que :

$\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\mathrm{Supp}(\rho_n) \subset B(0, \frac{1}{n})$, $\rho_n \geq 0$ et $\int \rho_n = 1$.

[Bre] p71 Théorème :
$\forall 1 \leq p < +\infty$, $\forall f \in L^p(\mathbb{R})$, $\rho_n * f \longrightarrow f$ dans $L^p(\mathbb{R})$.

[Bre] p71 Corollaire :
$\forall \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}$, $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$

Application : DVPT

Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$ ouvert et soit $\omega \subset\subset \Omega$. Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < +\infty$.
On suppose que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, 0 < \delta < \mathrm{dist}(\omega, {}^c\Omega)$ tq $\|\tau_h f - f\|_{L^p} < \varepsilon$, $\forall |h| < \delta$, $\forall f \in \mathcal{F}$

(où $\tau_h f(\cdot) = f(\cdot - h)$)

Alors $\mathcal{F}_{|\omega}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$.

2) Probabilités

a) Convergence L^p et en probas

Prop : CV $L^p \Rightarrow$ CV en proba

Prop : CV ps $\Rightarrow$ CV en proba $\Rightarrow$ CV ps d'une ss-suite

Déf : (uniforme intégrabilité) Une famille $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de v.a dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est dite uniformément intégrable (u.i) si

$$\lim_{a \to +\infty} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[\,|X_n|\, \mathbb{1}_{\{X_n > a\}}] \right) = 0$$

Théorème :
Soit $(X_n) \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Alors il y a équivalence entre
(i) (X_n) CV dans L^p
(ii) $(|X_n|^p)$ est u.i et $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \in L^p$.

b) Martingales

Théorème :
Soit (X_n) une martingale. Sont équivalents :
(i) $X_n \xrightarrow{ps} X_\infty^\infty$ ps et dans L^1
(ii) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est u.i
(iii) la martingale est fermée : $\exists Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = \mathbb{E}(Z \mid \mathcal{F}_n)$

Conséquence : une martingale bornée dans L^2 CV ps et dans L^2.

3) Transformation de Fourier

Déf : Pour $f \in L^1$, on définit la transformée de Fourier de f par $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)\, dx$

Lemme : $\hat{f} \in C(\mathbb{R})$ et $\hat{f}(\xi) \xrightarrow[|\xi| \to +\infty]{} 0$

Exemple : $f(x) = e^{-\alpha x^2} \Rightarrow \hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\xi^2/4\alpha}$

Prop :
- $\widehat{f*g} = \hat{f}\,\hat{g}$, $\forall f, g \in L^1$
- $xf \in L^1 \Rightarrow \hat{f}$ dérivable $\hat{f}' = \widehat{-ixf}$
- si $f \in C^1$ alors $\widehat{f'} = it\hat{f}$

Théorème d'inversion :
Si f appartient à L^1, de même que $\hat{f}$ alors
$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{ixt} dt \text{, pour presque tout } x$$
Théorème de Plancherel :
$$L^1 \cap L^2 \longrightarrow L^2 \qquad f \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}$$
se prolonge en une isométrie linéaire surjective de $L^2(\mathbb{R})$.
Application : résolution d'équations différentielles

4) Espaces de Sobolev.

But : résoudre des équations différentielles (ex : $\begin{cases} -u'' + u = f \text{ sur } [a,b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$) en se basant sur la notion de solution faible. Le cadre approprié est celui des espaces de Sobolev.

Def : L'espace de Sobolev $W^{1,p}$ est défini par
$W_p^{1,p}(]a,b[) = \{ u \in L^p,\ u' \in L^p \}$ (u' sens des distrib)
$W^{1,p}$ est un Banach pour $\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_p + \|u'\|_p$.

Prop : (caractérisation des éléments de $W^{1,p}$) DVPT
Soit $u \in L^p$, $1 < p \leq +\infty$. Alors :
(i) $u \in W^{1,p} \iff \exists C / \forall \varphi \in C_c^\infty(]a,b[),\ \left|\int u\varphi'\right| \leq C\|\varphi\|_q$
$\iff \exists C / \forall\ \omega \subset\subset]a,b[,\ \forall\ |h| < \text{dist}(\omega, {}^c]a,b[)$
$\|\tau_h u - u\|_p \leq C|h|$.

III) Le cas particulier de L^2

1) Structure hilbertienne et conséquences

L'application définie sur $L^2 \times L^2$ par $\langle f, g\rangle = \int_X f\bar{g}\, d\mu$ fait de L^2 un espace de Hilbert.

Conséquence : L^2 vérifie notamment la propriété de projection sur un convexe fermé et le théorème de représentation de Riesz.

Applications : • définition de l'espérance conditionnelle en probas dans le cas v.a dans L^2
• dualité dans les L^p, pour $1 \leq p \leq 2$.

2) $L^2(\mathbb{T})$ et séries de Fourier

But : décrire une fonction comme une superposition d'oscillations de fréquences de plus en plus élevées.

Notation. • $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong \{\text{fonctions } 2\pi\text{-périodiques}\}$
• $\forall f, g \in L^2(\mathbb{T}),\ \langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx$.
• $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$ où $e_n(x) = e^{inx}$
et $\forall N \in \mathbb{N},\ S_N(f) = \sum_{|n| \leq N} c_n(f) e_n$

Théorème :
$(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$ et $\forall f \in L^2(\mathbb{T}),\ f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, e_n\rangle e_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e_n$.

Conséquence : $S_N(f) \xrightarrow[N\to+\infty]{\|\ \|_2} f$

Formule de Parseval : $\|f\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$

Application : • calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
• inégalité isopérimétrique.

3) $L^2(I, \rho)$ et polynômes orthogonaux

I un intervalle de $\mathbb{R}$

Def : On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable, > 0, telle que
$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_I |x|^n \rho(x)\, dx < +\infty$.

On note $L^2(I, \rho) = L^2(I, \rho(x)\,dx)$

Prop : Il existe une famille de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux tels que $\forall n$, $\deg(P_n) = n$.

Exemple : Polynômes de Hermite, $\rho(x) = e^{-x^2}$
$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

Application : intégration numérique par la méthode de Gauss.

Ref :

- Rudin
- Brezis
- Briane-Pagès, théorie de l'intégration
- O-R
- Ouvrard, Probabilités 2