Leçon 234 - Espaces L^p, $1 \leq p \leq \infty$.

I Introduction aux espaces L^p

1) Espaces $\mathcal{L}^p$, propriétés

<u>Définition 1.1:</u> $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Pour $p \in [1, \infty[$ on note $\mathcal{L}^p$ l'ensemble des fonctions f mesurables à valeurs complexes telles que $\int_X |f|^p d\mu < \infty$. On pose $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$.

<u>Définition 1.2:</u> on note $\mathcal{L}^\infty$ l'ensemble des fonctions f mesurables telles que $\exists M \in \mathbb{R}$, $\mu(\{x ; |f(x)| > M\}) = 0$. Pour $f \in \mathcal{L}^\infty$ on pose $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = \inf_{M \in \mathbb{R}} (\mu(\{x ; |f(x)| > M\}) = 0)$.

<u>Proposition 1.3:</u> on note $B = \{E \in \mathcal{M} ; \mu(E) < \infty\}$. On a équivalence entre :

1) $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu) \supset \mathcal{L}^q(X, \mathcal{M}, \mu)$ pour un couple $(p, q) \in [1, \infty[^2$, $p < q$;
2) $\sup_{E \in B} \mu(E) < \infty$;
3) $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu) \supset \mathcal{L}^q(X, \mathcal{M}, \mu)$, $\forall (p, q) \in [1, \infty[^2$, $p < q$.

Si $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est σ-fini alors la condition 2) devient $\mu(X) < \infty$.

<u>Remarque 1.4:</u> contre-exemple : sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $x \mapsto \frac{\mathbb{1}_{[0,1]}(x)}{\sqrt{x}} \in \mathcal{L}^1 \setminus \mathcal{L}^2$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \in \mathcal{L}^2 \setminus \mathcal{L}^1$.

<u>Définition 1.5:</u> 2 nombres positifs p et q sont dits conjugués si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On conviendra que 1 et $+\infty$ sont conjugués.

<u>Proposition 1.6:</u> inégalités de Hölder et de Minkowski : $1 \leq p, q \leq \infty$ conjugués, soient f et g 2 fonctions mesurables à valeurs dans $[0, \infty]$. On a :

- $\int_X fg \, d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X g^q d\mu\right)^{1/q}$ (Hölder)
- $\left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p}$ (Minkowski)

<u>Corollaire 1.7:</u> $\forall p \in [1, \infty]$, $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, et $f \mapsto \|f\|_{\mathcal{L}^p}$ est une semi-norme sur cet espace.

2) Construction de $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$

<u>Définition 1.8:</u> pour f, g dans $\mathcal{L}^p$, on définit la relation d'équivalence $\sim$ par $f \sim g \Leftrightarrow \mu(\{x, f(x) \neq g(x)\}) = 0$. On note $L^p(X, \mathcal{M}, \mu) = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu) / \sim$

<u>Remarque 1.9:</u> abusivement, on simplifiera les notations en confondant $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ avec sa classe $\overline{f} \in L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$.

<u>Proposition 1.10:</u> Riesz-Fischer : $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace de Banach $\forall p \in [1, \infty]$. $\longrightarrow$ <u>DVPT</u>

3) Convergence

<u>Proposition 1.11:</u> convergence L^p dominée : soit $(f_n) \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)^{\mathbb{N}}$ convergeant vers f μ-presque partout.

- Si $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{\mathcal{L}^p} < \infty$, alors $f \in \mathcal{L}^p$.
- Si $\exists g \in \mathcal{L}^p$, $|f_n| \leq g$ μ-presque partout pour tout n, alors $f_n \xrightarrow[n]{L^p} f$.

<u>Remarque 1.12:</u> contre exemple : $f_n = n \mathbb{1}_{[0, 1/n]}$ converge vers 0 presque partout mais $\|f_n\|_{L^1} = 1$ $\forall n$.

II Propriétés de L^p

1) Densité

Proposition 2.1 : $\forall p \in [1, \infty[$, l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans L^p. $\mathcal{C}_c(X)$ est dense ds L^p.

Remarque 2.2 : ce résultat est faux pour $p = +\infty$. On a seulement que l'ensemble des fonctions étagées est dense dans L^∞.

Proposition 2.3 : $\forall p \in [1, \infty[$, L^p est séparable. L^∞ n'est pas séparable.

2) Dualité

Théorème 2.5 : représentation de Riesz : soient $p \in]1, \infty[$ et $\varphi \in L^q$ avec p et q conjugués. Alors $\exists ! \, u \in L^q, \forall \varphi \in L^p, \varphi(f) = \int u f$.

Corollaire 2.6 : $\forall p \in [1, \infty[$, $(L^p)' = L^q$ où q est le conjugué de p.

Remarque 2.7 : $(L^\infty)' \supsetneq L^1$, c'est ce qu'on observe en prenant le prolongement de $\varphi_0 : f \longmapsto f(0)$.

3) Compacité, convexité

Définition 2.8 : une famille $\mathcal{F} = (f_n)$ de fonctions est équicontinue si $\sup_{f \in \mathcal{F}} \|\tau_a f - f\|_{L^p} = O_{a \to 0}(1)$, où $\tau_a f(x) = f(x-a)$. Elle est équi-intégrable si $\sup_{f \in \mathcal{F}} \left(\int_X |f_n|^p \mathbb{1}_{\{|f| > M\}} \right) = O_{M \to \infty}(1)$.

Théorème 2.9. Fréchet - Kolmogorov : $\mathcal{F} = (f_n)$ est relativement compacte ssi $\mathcal{F}$ bornée (dans L^p), $\underbrace{\text{équicontinue}}_{\text{ssi } \forall n}$ et équi-intégrable.

Proposition 2.10 : $\forall p \in]1, \infty[$, L^p est uniformément convexe.

III L'espace L^2

1) Espace de Hilbert

Proposition 3.1 : l'application $(\cdot|\cdot)$ définie sur $L^2 \times L^2$ par $(f|g) = \int_X f \bar{g} \, d\mu$ est une forme sesquilinéaire.

Remarque 3.2 : L^2 est autodual car $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Théorème 3.3 : $(L^2, (\cdot|\cdot))$ est un espace de Hilbert.

Lemme 3.4 : identité du parallélogramme : soient f et g dans L^2, on a $\|f+g\|_2^2 + \|f-g\|_2^2 = 2\left(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2\right)$ où $\|f\|_2 = \sqrt{(f|f)}$.

2) Application

Définition 3.5 : un système orthogonal de $L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ est une suite (f_n) telle que $\forall (n,m)$, $f_n \neq 0$ et $(n \neq m \Rightarrow (f_n|f_m) = 0)$. Une base hilbertienne est un système orthogonal qui engendre un sous-espace dense de $L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Proposition 3.6 : inégalité de Bessel : soit $f \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ et soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système ~~orthogonal~~ orthonormal de $L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} |(f|\varphi_n)|^2 \leq \|f\|_2$, avec égalité $\forall f$ ssi $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne.

IV Utilisation des espaces L^p

1) Convolution

Proposition 4.1 : si $f \in L^1$ et $g \in L^p$ pour $1 \leq p < \infty$, alors $f * g \in L^1$ et $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$.

Proposition 4.2 : soient $(p,q,r) \in [1,\infty]^3$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$. et $(f,g) \in L^p \times L^q$. Alors $\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.

Définition 4.3 : une approximation de l'unité est une suite de fonctions $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positives telle que $\int_X \phi_n = 1$ et $\lim\limits_{n \to \infty} \int_{\{x > |\varepsilon|\}} \phi_n = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$.

Proposition 4.4 : $\forall f \in L^p$, $\|f * \phi_n\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$ et on a $f * \phi_n \xrightarrow[n \to \infty]{L^p} f$.

Corollaire 4.5 : $\forall \Omega \subset \mathbb{R}$ ouvert, $\forall p \in [1,\infty[$, $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

2) Probabilités

Proposition 4.6 : la convergence L^p implique la convergence en probabilité.

Proposition 4.7 : $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires converge dans L^p ssi $(|X_n|^p)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément intégrable et $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{P} X$.

3) Séries de Fourier

Définition 4.8 : $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, on définit sa transformée de Fourier $\hat{f}$ par $\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(y)\, dy$.

Théorème 4.9 : $f \in L^1 \cap L^2$, alors $\hat{f} \in L^2$ et on a :

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2$$

Théorème 4.10 : $\mathcal{P} : \begin{array}{ccc} L^1 \cap L^2 & \longrightarrow & L^2 \\ f & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f} \end{array}$

de Fourier-Plancherel, elle se prolonge en un isomorphisme isométrique de L^2 sur L^2.

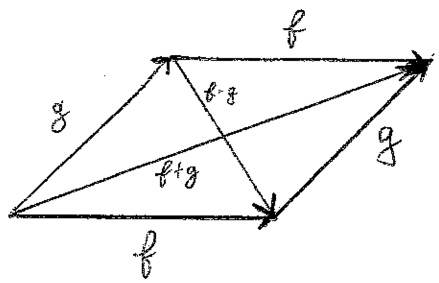
4) Espaces de Sobolev

Définition 4.11 : soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, on définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I) ; \forall \varphi \in \mathcal{C}_c(I), \int_I u\varphi' = -\int u'\varphi\}$.

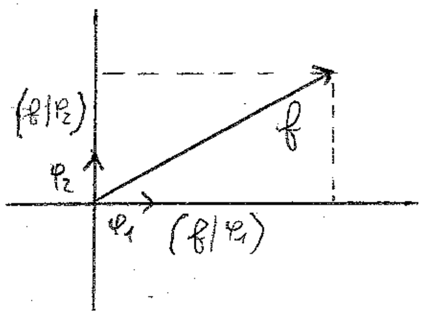
On pose $H^1(I) = W^{1,2}(I)$, et $(f|g)_{H^1} = (f|g)_{L^2} + (f'|g')_{L^2}$ avec la norme associée $\|f\|_{H^1} = \sqrt{(f|f)_{H^1}}$.

Théorème 4.12 : $H^1(I)$ est un espace de Hilbert, qui s'injecte de façon compacte ds $\mathcal{C}(\bar{I})$. → DVPT

Schémas :



Identité du parallélogramme



Inégalité de Bessel

Références

Faraut, Calcul intégral

Briane-Pagès, Théorie de l'intégration

Hirsch Lacombe,

Brézis,

Queffélec,