234

Espaces L^p, $1 \leq p \leq +\infty$

Cadre $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Définitions et premières propriétés

1) Espaces $\mathcal{L}^p$

Déf 1. Pour tout réel $p > 0$, on définit :

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \{ f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K})) \text{ mesurable} \ / \int_X |f|^p d\mu < +\infty \}$$

On note $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$

• Soit $f : (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}_+}$. On définit le supremum essentiel de f par :

$$\operatorname{supess}(f) := \inf \{ M > 0 \ / \ \mu(\{f > M\}) = 0 \}$$

Pour $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{K}$, on pose $\|f\|_\infty := \operatorname{supess}(|f|)$

et $\mathcal{L}^\infty(\mu) := \{ f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{K} \ / \ \|f\|_\infty < +\infty \}$

Ex 2 Si m désigne la mesure de comptage,

$$\mathcal{L}^p(m) = \ell^p(\mathbb{N}) := \{ (a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ / \ \sum_{n \geq 0} |a_n|^p < +\infty \}$$

Prop 3 • Inégalité de Hölder

Soient $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ et $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$, $p, q > 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Alors $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

• Inégalité de Minkowski

Soient $1 \leq p \leq +\infty$, $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, alors :

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

2) Espaces L^p

Pb : $(\mathcal{L}^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un e.v semi-normé. Il manque la propriété $[\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0]$ pour en faire un e.v normé.

Solution on quotiente par $[f \sim g \Leftrightarrow f = g \ \mu\text{-pp}]$

Déf 4 $L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu) / \{\|\cdot\|_p = 0\}$ est un $\mathbb{K}$-ev normé

Th 5 (Riesz-Fischer)

Pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mu)$ est un espace de Banach] DVPT 1

3) Inclusions des espaces L^p

Prop 6 (a) Si $\mu(X) < +\infty$, alors $0 < p \leq q \Rightarrow L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$

(b) Si m est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ alors

$$0 < p \leq q \Rightarrow \ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$$

Cex 7 Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ muni de la mesure de Lebesgue λ, on a : $\frac{\mathbb{1}_{]0,1[}}{\sqrt{\cdot}} \in \mathcal{L}^1(\lambda) \setminus \mathcal{L}^2(\lambda)$ et $\frac{1}{\sqrt{(\cdot)^2+1}} \in \mathcal{L}^2(\lambda) \setminus \mathcal{L}^1(\lambda)$

4) Convergence dans les espaces L^p

Rq Dans Riesz-Fischer on montre que.

Prop 8 $\forall p \in [1, +\infty[$, $\forall (f_n) \in L^p(\mu)^{\mathbb{N}}$, $f \in L^p(\mu)$ tq $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_p} f$, il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k \geq 0}$ tq $f_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ μ-pp

Cex 9 $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$

$\forall n \geq 0$, $\forall 0 \leq k \leq 2^n - 1$, $f_{2^n+k} := \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[}$.

Alors $\|f_n\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ mais $f_n \underset{\lambda\text{-pp}}{\not\to} 0$

Th 10 (Convergence L^p-dominée, $1 \leq p < \infty$)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions de L^p tq $f_n \xrightarrow[\mu\text{-pp}]{} f$

(a) si $\sup_n \|f_n\|_p < +\infty$, $f \in L^p(\mu)$

(b) si $\exists g \in L^p(\mu)$ tq $|f_n| \leq g$ μ-pp $\forall n$, alors $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} f$

Cex 11 sans domination

$f_n = n \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ μ-pp et $\forall n$, $\|f_n\|_1 = 1$.

5) Densité dans les L^p

Prop 12 • $\forall p \in [1, +\infty[$, l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p(\mu)$.

• L'ensemble des fonctions étagées est dense dans $L^\infty(\mu)$

Th 13 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$

(a) l'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans $L^p(\lambda)$, $1 \leq p < +\infty$.

(b) l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\lambda)$, $1 \leq p < +\infty$.

Application 14
- Riemann - Lebesgue
- $L^1 \cap L^2$ est dense dans L^2 (utile pour le théorème de Fourier - Plancherel)

II) Utilisation des espaces L^p

1) Convolution

But: Régulariser des fonctions

Déf 15 Si f et g sont deux fonctions quelconques, on appelle produit de convolution de f par g, la fonction (si elle est bien définie) : $(f*g)(x) = \int_X f(y)g(x-y)\,dy$

Th 16 Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$

Alors $f*g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $\|f*g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$.

Pb La convolution par une fonction quelconque de L^1 n'apporte pas de continuité. Mais on a :

Prop 17 Soient $f \in L^p$, $g \in L^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Alors $f*g$ est bornée uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Si $1 < p < \infty$, $(f*g)(x) \xrightarrow[|x| \to \infty]{} 0$

Prop 18 Si $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in L^1$, $f*g \in C^\infty(\mathbb{R})$

Déf 19 On appelle suite régularisante une suite $(\rho_n)_{n \geq 1}$ t.q :
- $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\mathrm{Supp}(\rho_n) \subset B(0, \frac{1}{n})$
- $\int \rho_n = 1$, $\rho_n \geq 0$ sur $\mathbb{R}^N$.

Prop 20 Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p < +\infty$, alors $\rho_n * f \longrightarrow f$ ds $L^p(\mathbb{R}^N)$

Cor 21 $\forall \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^N$, $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ $(1 \leq p < +\infty)$

Application 22 Inégalité de Hardy

$f \in L^p(\mathbb{R}^+)$, $Tf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$ $\forall x > 0$.

Si $1 < p < +\infty$, $\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^+)} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^+)}$ et $Tf \in L^p$.

2) Probabilités

- Lien entre convergence L^p et convergence en proba.

Prop 23 CV $L^p \Rightarrow$ CV en proba

Déf 24 Une famille de v.a $(X_i)_{i \in I}$ est uniformément intégrable si $\lim\limits_{a \to +\infty} \left(\sup\limits_{i \in I} \int_{\{|X_i| > a\}} |X_i|\,dP \right) = 0$

Th 25 $(p \geq 1)$ $(X_n) \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)^{\mathbb{N}}$ suite de v.a.

Il y a équivalence entre :

(i) $(X_n)_n$ converge dans L^p

(ii) $(|X_n|^p)_n$ est unif. intégrable et $\exists X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telle que $X_n \xrightarrow[n\infty]{P} X$

Cex 26 pour $n \geq 1$, X_n de loi $\frac{1}{n}\delta_{n^2} + (1 - \frac{1}{n})\delta_0$

Alors $X_n \xrightarrow[n\infty]{P} 0$ mais $X_n \not\to 0$ dans L^1

- Martingales

- Soit $p > 1$, $(X_n)_n$ martingale adaptée à $(\mathcal{F}_n)_n = (\sigma(X_0, \dots, X_n))_n$

Si $(X_n)_n$ est bornée dans L^p alors (X_n) converge vers X dans L^p et presque sûrement et on a $\forall n$, $X_n = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n)$

- Si $p = 1$, pour que $(X_n)_n$ converge dans L^1 et ps il faut et il suffit que (X_n) soit uniformément intégrable.

III) Le cas particulier de L^2

1) Structure hilbertienne et conséquences

L'application définie sur $L^2 \times L^2$ par $\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g} \, d\mu$ fait de L^2 un espace de Hilbert.

Conséquence L^2 vérifie en particulier la propriété de projection sur un convexe fermé et le théorème de représentation de Riesz.

Applications • définition de l'espérance conditionnelle en probabilité dans le cas de v.a dans L^2

• caractérisation des fermés de L^p $(1 \leq p < \infty)$ avec le théorème suivant :

Th 27 (Grothendieck) [DVPT 2]

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ espace mesuré, μ mesure finie. On se place dans L^p, $1 \leq p < \infty$.

Si F est un sous-espace fermé de L^p et si $F \subset L^\infty$, alors $\dim_{\mathbb{C}} F < +\infty$.

2) $L^2(\mathbb{T})$ et séries de Fourier

But : décrire une fonction comme superposition d'oscillations de fréquences de plus en plus élevées.

Notations : • $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

• $\forall f, g \in L^2(\mathbb{T})$, $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} \, dx$

• $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$ où $e_n(x) = e^{inx}$

et $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_N(f) = \sum_{|n| \leq N} c_n(f) e_n$

Th 28 $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$ et $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$, $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, e_n \rangle e_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$

D'où $\| S_N(f) - f \|_2 \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$

Formule de Parseval : $\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$

Application 29 • Inégalité isopérimétrique

• Inégalité de Wirtinger : $f \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tq $\int_0^{2\pi} f = 0$.

Alors $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, dt$

3) Transformation de Fourier

Déf 30 Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit la transformée de Fourier de f par : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\xi} \, dt$

Lem 31 $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R})$ et $\hat{f}(\xi) \xrightarrow[\xi \to \pm\infty]{} 0$

Prop 32 • $\forall f, g \in L^1$, $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$

• si $g(x) = -ixf(x)$ et si $g \in L^1$, alors $\hat{f}$ est dérivable et $\hat{f}' = \hat{g}$

Théorème d'inversion :

Si f et $\hat{f}$ sont dans L^1, alors $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{ixt} \, dt$ pour presque tout x.

Théorème de Plancherel

$$\begin{aligned} L^1 \cap L^2 &\longrightarrow L^2 \\ f &\longmapsto \hat{f} \end{aligned}$$ se prolonge en une isométrie linéaire de L^2

Application : résolution d'équations différentielles.

4) $L^2(I, \rho)$ et polynômes orthogonaux

I intervalle de $\mathbb{R}$.

Déf 33 On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}_+^*$ mesurable telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x) \, dx < +\infty$

$L^2(I, \rho) := L^2(I, \rho(x) dx)$

Prop 34 Il existe une unique famille $(P_n)_n$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux tels que $\deg P_n = n$

Ex 35 Polynômes de Hermite : $I = \mathbb{R}$, $\rho(x) = e^{-x^2}$

$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$

Application Intégration numérique par la méthode de Gauss.

Théorème de Grothendieck

Kévin Le Balc'h

22 septembre 2014

Contexte : $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ un espace probabilisé.
Prérequis : Pour $1 \leq p \leq \infty$,
- Définition de $L^p(\nu)$.
- $L^p(\nu)$ muni de $||.||_p$ est un espace de Banach
- Théorème de graphe fermé
- Inégalité de Hölder
- Quelques propriétés des espaces de Hilbert séparables : base hilbertienne, théorème de Pythagore.

Théorème 1. *Soit $1 \leq p < +\infty$.*
Tout sous-espace vectoriel fermé de $L^p(\nu)$ qui est inclus dans $L^\infty(\nu)$ est de dimension finie.

Démonstration. : Soit S un sous-espace vectoriel fermé S de $L^p(\nu)$ qui est inclus dans $L^\infty(\nu)$.

Première étape : On montre qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall f \in S, \ ||f||_\infty \leq K||f||_p.$$

On définit

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & S & \to & L^\infty \\ & & f & \mapsto & f \end{array}$$

S est un sev fermé de L^p qui est un Banach donc S est un Banach.
L^∞ est un Banach.
Φ est bien définie par définition de S ($S \subset L^\infty$).
Φ est linéaire.
Donc, par le théorème du graphe fermé, pour montrer que Φ est continue, il suffit de montrer que son graphe est fermé.
Soit $((f_n, \Phi(f_n))$ une suite de son graphe qui converge vers (f, g). Plus précisément, (f_n) converge vers f dans L^p et $(\Phi(f_n) = f_n))$ converge vers g dans L^∞. Mais comme la convergence L^∞ implique la convergence L^p car ν est une mesure finie, on en déduit par unicité de la limite dans L^p que $g = f$.
Et donc, $g = \Phi(f) = f$.
Le graphe de Φ est ainsi fermé donc Φ est continue.
Il existe alors une constante $K > 0$ telle que

$$\forall f \in S, \ ||f||_\infty = ||\Phi(f)||_\infty \leq K||f||_p.$$

Deuxième étape : On montre qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall f \in S, \ ||f||_\infty \leq M||f||_2.$$

Distinguons deux cas.

★ Si $p \leq 2$ alors $1 \leq 2/p$, et l'inégalité de Hölder implique

$$\int_\Omega |f|^p \times 1 \ \mathrm{d}\nu \leq (\int_\Omega (|f|^p)^{2/p} \ \mathrm{d}\nu)^{p/2} (\int_\Omega 1^{2/(2-p)} \ \mathrm{d}\nu)^{(2-p)/2} \leq ||f||_2^p.$$

En élevant à la puissance $1/p$, on trouve

$$||f||_p \leq ||f||_2.$$

Ce qui donne le résultat annoncé en prenant $K = M$.

★ Soit $p > 2$.

Par définition du supremum essentiel, il alors N un ensemble de mesure nulle tel que

$$\forall x \in \Omega \setminus N, \ |f(x)| \leq ||f||_\infty.$$

On obtient donc

$$\forall x \in \Omega \setminus N, \ |f(x)|^p = |f(x)|^{p-2}|f(x)|^2 \leq ||f||_\infty^{p-2}|f(x)|^2.$$

On intègre ces inégalités sur $\Omega \setminus N$, ce qui revient exactement à intégrer sur Ω comme N est de mesure nulle.

$$||f||_p^p \leq ||f||_\infty^{p-2}||f||_2^2.$$

On utilise la question précédente pour obtenir :

$$||f||_\infty^p \leq K^p||f||_p^p \leq ||f||_\infty^{p-2}||f||_2^2.$$

D'où,

$$||f||_\infty \leq K^{p/2}||f||_2.$$

On prend alors $M = \max(K, K^{p/2})$.

$$\forall f \in S, \ ||f||_\infty \leq M||f||_2.$$

Troisième étape : On considère $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille orthonormée de $L^2(\nu)$, de fonctions de S.

On montre que pour presque tout x de Ω et tous réels $c1, \ldots, c_n$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$|\sum_{i=1}^n c_i f_i(x)| \leq M\sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}.$$

Pour chaque i, il existe un ensemble N_i de mesure nulle tel que

$$\forall x \in \Omega \setminus N_i, \ |f_i(x)| \leq ||f_i||_\infty.$$

Alors par sous additivité de la mesure ν, on trouve que $\bigcup_{i=1}^{n} N_i$ est également de mesure nulle.
Soit x dans $\Omega' = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{n} N_i$,

$$|\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)| \leq ||\sum_{i=1}^{n} c_i f_i||_\infty \leq M||\sum_{i=1}^{n} c_i f_i||_2 = M\sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}.$$

La dernière égalité provient du théorème de Pythagore dans L^2 en utilisant le fait que (f_i) forment une famille orthonormée de L^2.

Quatrième étape : On en déduit que $n \leq M^2$.
Dans l'étape 3, on remplace les c_i par $f_i(x)$ et on élève au carré, on trouve alors pour tout x dans Ω',

$$(\sum_{i=1}^{n}(f_i(x))^2)^2 \leq M^2 \sum_{i=1}^{n} f_i(x)^2.$$

On simplifie par $\sum_{i=1}^{n} f_i(x)^2$ et on trouve

$$\sum_{i=1}^{n}(f_i(x))^2 \leq M^2,$$

et cette inégalité reste bien entendue vraie quand $\sum_{i=1}^{n}(f_i(x))^2 = 0$.
On intègre alors sur Ω', ce qui exactement pareil que d'intégrer sur Ω car Ω' est de mesure pleine. Et comme les f_i sont de norme 1, on obtient

$$n = \int_\Omega (\sum_{i=1}^{n}(f_i(x))^2)\ \mathrm{d}\nu \leq M^2 \int_\Omega 1\ \mathrm{d}\nu = M^2.$$

Ce qui prouve l'étape 4.

Cinquième étape (Conclusion) : On a prouvé que toute famille orthonormée de S possède moins de M^2 éléments.
On considère $\overline{S}^{||\cdot||_2}$ qui est un sous espace fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\nu)$ donc est lui-même un espace de Hilbert. Comme $L^2(\nu)$ est séparable, on en déduit que $\overline{S}^{||\cdot||_2}$ est un espace de Hilbert séparable donc possède une base hilbertienne $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ qui est en particulier une famille orthonormée donc possède moins de M^2 éléments.
Mais $\overline{vect\{f_i\ ;\ i \in \mathbb{N}\}} = \overline{S}^{||\cdot||_2}$, et comme on a en fait $vect\{f_i\ ;\ i \in \mathbb{N}\}$ qui est un sev de dimension finie (avec ce qui précède) donc est fermé d'où

$$vect\{f_i\ ;\ i \in \mathbb{N}\} = \overline{S}^{||\cdot||_2}.$$

Donc $\overline{S}^{||\cdot||_2}$ possède une famille génératrice finie donc est de dimension finie.
Or S sev de $\overline{S}^{||\cdot||_2}$ donc S est finalement de dimension finie.

Si S est de dim infinie, on peut trouver une famille libre à M^2 éléments, qu'on orthonormalise. Contradiction. S est de dimension finie.

□

Références : Maxime Zavidovique, Un max de Math, pages 180-...

Théorème de Riesz-Fischer

Kévin Le Balc'h

21 septembre 2014

Contexte : Soit $(X, \mathcal{A}, \nu)$ un espace mesuré.
Prérequis : Pour $1 \leq p \leq \infty$,
- définition de $\mathcal{L}^p(\nu)$.
- $\mathcal{L}^p(\nu)$ muni de $||.|| := ||.||_p$ est un espace vectoriel semi-normé.
- définition de $L^p(\nu)$.
- $L^p(\nu)$ muni de $||.|| := ||.||_p$ est un espace vectoriel normé.
- connaissance des théorèmes de base de l'intégrale de Lebesgue : lemme de Fatou, théorème de convergence monotone, inégalité de Minkowski.

Théorème 1. *Pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\nu)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. : Supposons d'abord que $1 \leq p < \infty$.
Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $L^p(\nu)$.
Il existe alors une sous-suite $(f_{\phi(n)})$ telle que

$$\forall k \geq 0, \ ||f_{\phi(k+1)} - f_{\phi(k)}|| \leq 2^{-k}. \tag{1}$$

Posons

$$g_N = \sum_{k=1}^{N} |f_{\phi(k+1)} - f_{\phi(k)}|.$$

(g_N) est une suite croissante de fonctions mesurables positives donc par le théorème de convergence monotone, (g_N) converge simplement vers $g = \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{\phi(k+1)} - f_{\phi(k)}|$.
Comme (1) est vérifiée, l'inégalité de Minkowski donne $||g_N|| \leq 1$ pour tout N.
Ainsi, par le lemme de Fatou,

$$\int_X \liminf_N g_N^p \,\mathrm{d}\nu = \int_x g^p \,\mathrm{d}\nu \leq \liminf_N \int_X g_N^p \,\mathrm{d}\nu \leq 1^p = 1.$$

Donc,

$$||g|| \leq 1.$$

En particulier, g est fini presque partout. D'où, la série

$$f_{\phi(0)} + \sum_{k \geq 0} (f_{\phi(k+1)} - f_{\phi(k)})$$

est absolument convergente pour presque tout $x \in X$ donc convergente pour presque tout $x \in X$ (car $\mathbb{C}$ est complet).

On définit alors f par $f(x) = f_{\phi(0)} + \sum_k^{+\infty} (f_{\phi(k+1)} - f_{\phi(k)})$ quand la série converge et $f(x) = 0$ sinon (sur l'ensemble restant de mesure nulle).
Mais comme

$$f_{\phi(0)} + \sum_k^{N-1} (f_{\phi(k+1)} - f_{\phi(k)}) = f_{\phi(N)},$$

on en déduit que

$$f(x) = \lim_{N \to +\infty} f_{\phi(N)} \ \ p.p.$$

Nous avons trouvé une fonction f qui est la limite simple p.p. de $(f_{\phi(N)})$.
Il faut maintenant démontrer (f_n) converge vers f dans L^p.
Soit $\epsilon > 0$, il existe alors n_0 telle que pour tous $n, m \geq n_0$, $||f_n - f_m|| \leq \epsilon$. On a alors, en appliquant le lemme de Fatou, pour tout $m \geq n_0$,

$$\int_X \liminf_n |f_{\phi(n)} - f_m|^p \, \mathrm{d}\nu = \int_X |f - f_m|^p \, \mathrm{d}\nu \leq \liminf_n \int_X |f_{\phi(n)} - f_m|^p \, \mathrm{d}\nu \leq \epsilon^p.$$

Ce qui montre plusieurs choses.
$f - f_m \in L^p$ et donc $f \in L^p$ car L^p est un espace vectoriel.
$||f - f_m|| \to 0$ quand $m \to +\infty$.
Ce qui termine la démonstration pour $1 \leq p < \infty$.

Pour $p = \infty$.
Soit (f_n) une suite de Cauchy de L^∞.
On définit $E = \bigcap_{k,m,n} \{x \in X \ ; \ |f_k(x)| \leq ||f_k||_\infty \text{ et } |f_m(x) - f_n(x)| \leq ||f_m - f_n||_\infty\}$.
Par définition de $||.||_\infty$, E^c est de mesure nulle.
(f_n) est alors une suite de Cauchy de $\mathcal{B}(E, \mathbb{C})$ munie de la norme infinie usuelle (l'ensemble des fonctions bornées de E dans $\mathbb{C}$) qui est complet donc elle converge vers f pour la norme infinie usuelle.
Posons alors $f(x) = 0$ en dehors de E.
Soit $\epsilon > 0$, il existe alors n_0 telle que pour tout $n \geq n_0$,

$$\forall x \in E, \ |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

Ce qui donne

$$\forall x \in X, \ |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \text{ p.p.}$$

D'où,

$$||f_n - f||_\infty \leq \epsilon.$$

□

Théorème 2. *Pour $1 \leq p \leq \infty$.*
Soit (f_n) une suite de $L^p(\nu)$ qui converge vers f dans $L^p(\nu)$. Alors on peut extraire une sous-suite $(f_{\phi(n)}$ telle que $(f_{\phi(n)}$ converge vers f presque partout.

Démonstration. : Pour $1 \leq p < \infty$, ceci va découler de la démonstration qu'on vient de faire.
En effet, (f_n) converge dans $L^p(\nu)$ donc est en particulier de Cauchy, d'où grâce à la

démonstration précédente (texte en gras), on peut trouver une fonction g qui est limite simple p.p. d'une sous-suite extraite $(f_{\phi(n)})$.
Or, en poursuivant la démonstration comme tout à l'heure, on voit en fait que (f_n) converge vers g dans L^p. Par unicité de la limite dans L^p (car L^p est séparé car métrique), on conclut que $f = g$. Ce qui donne le résultat.

Pour $p = \infty$, c'est beaucoup plus simple.
(f_n) converge vers f en norme infinie donc en particulier elle converge simplement vers f presque partout. *Remarque* ! Il n'y a même pas besoin d'extraire dans ce cas-là.

□

Références : Walter Rudin, Analyse réelle et complexe, pages 83-84 de la 3ème édition.