« Marque L^p »

Leçon 234. Espaces L^p, $1 \leq p \leq +\infty$

Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$, un espace mesuré tel que $\mu(X) \neq 0$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I Généralités

I.1) Les espaces $\mathcal{L}^p$, $0 < p \leq +\infty$

• Définition : Pour $0 < p < +\infty$, $\mathcal{L}^p(\mu)$ est l'ensemble des fonctions mesurables de X dans $\mathbb{K}$ telles que $\int_X |f|^p d\mu < \infty$ càd $f^p \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

• Définition : Soit f une fonction de X dans $\mathbb{R}_+$, un majorant essentiel de f est un élément $m \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que l'ensemble $\{f > m\}$ soit négligeable.

On notera $M(f)$, l'ensemble des majorants essentiels de f.

• Lemme : Soit $f : X \to \mathbb{R}_+$, $M(f)$ est un intervalle fermé de la forme $[m_0, +\infty]$ avec $m_0 \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

• Définition : Soit $f : X \to \mathbb{R}_+$. La borne inférieure de $M(f)$ est appelée borne supérieure essentielle de f et notée $\sup_e(f)$

• Définition ($\mathcal{L}^\infty(\mu)$) : Soit $f : X \to \mathbb{K}$, f est dite essentiellement bornée si $\sup_e(|f|) < \infty$. L'ensemble des fonctions mesurables essentiellement bornées est noté $\mathcal{L}^\infty(\mu)$.

• Notation : Pour $f : X \to \mathbb{K}$ mesurable et $p \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \in [0; +\infty]$ et $\|f\|_\infty = \sup_e(|f|) \in [0, +\infty]$

• Remarque : Pour $p \in]0; +\infty]$, $\|f\|_p$ est fini ssi $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$

• Notation : On utilisera aussi les notations $\mathcal{L}^p$ et $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$, $\ell^p(X)$ quand μ est la mesure de comptage, $\mathcal{L}^p(A)$ quand μ est la mesure de Lebesgue, avec $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

• Proposition : Pour $0 < p \leq +\infty$, $\mathcal{L}^p(\mu)$ est un espace vectoriel

• Proposition : Pour μ la mesure de comptage, $0 < p < p' \leq +\infty$, on a $\ell^p(X) \subseteq \ell^{p'}(X)$, càd les $\ell^p(X)$ sont croissants en p.

• Proposition : Si $\mu(X) < \infty$, $0 < p < p' \leq +\infty$, on a $\mathcal{L}^{p'}(X) \subseteq \mathcal{L}^p(\mu)$

$\boxed{\text{Exemple}}$ En général il n'y a pas de telle monotonie. En effet $1\!\!1_{[1;+\infty[} \frac{1}{x} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R})^c$ et $1\!\!1_{]0,1]} \frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})^c$

• Proposition : Pour $0 < p < r < q \leq +\infty$, on a $\mathcal{L}^r(\mu) \supset \mathcal{L}^p(\mu) \cap \mathcal{L}^q(\mu)$

I.2) Les espaces L^p, $1 \leq p \leq +\infty$

• Définition : $p, q \in [1; +\infty]$ sont dit conjugué si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Avec $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Proposition (Inégalité de Hölder) : f et g mesurables de X dans $\mathbb{K}$, $p, q \in [1; +\infty]$ conjugués, alors $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \leq +\infty$

• Remarque : On peut en déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $L^2(\mu)$ (défini ci-après) muni du produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_X f\bar{g}\, d\mu$ qui est en fait un espace de Hilbert.

Proposition (Inégalité de Minkowski). Soient f, g mesurables de X dans $\mathbb{K}$, $p \in [1;+\infty]$, alors $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

. Remarque. Ce n'est pas vrai en général pour $p<1$. Par exemple dans $\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}([0;1])$, on a $\|x+1\|_{\frac{1}{2}} > \|x\|_{\frac{1}{2}} + \|1\|_{1/2}$

. Corollaire : Pour $p \in [1;+\infty]$, $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(\mu)$

. Définition : Pour $p \in [1;+\infty]$, $L^p(\mu)$ est l'espace vectoriel normé induit par l'espace semi-normé $\mathcal{L}^p(\mu)$

. Rappel : C'est alors le quotient de $\mathcal{L}^p(\mu)$ par le noyau de sa semi-norme, $\|\cdot\|_p$ qui est alors une norme sur $L^p(\mu)$ (et elle est invariante sur les classes d'équivalence)

. Remarque : On fera l'abus de langage de considérer un élément de L^p comme une fonction.

. Proposition. Si $\mu(X)<\infty$, soient $0<p<q<+\infty$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour toute $f : X \to \mathbb{K}$ mesurable on ait $\|f\|_p \leq \alpha \|f\|_q$ avec $\alpha = 1$ si $\mu(X)=1$

. Remarque : En particulier, sur $L^q(\mu)$ ($\subset L^p(\mu)$), $\|\cdot\|_q$ est plus fine que $\|\cdot\|_p$.

II Propriétés topologiques de $L^p(\mu)$

II.1) Complétude des espaces $L^p(\mu)$

Rappel : La complétude est une notion métrique et non topologique.

Théorème (Riesz-Fischer) : Pour $p \in [1;+\infty]$, $L^p(\mu)$ est un espace de Banach.

II.2) Convolution dans les espaces $L^p(\mathbb{R})$

Définition : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, f, g deux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{K}$, leur produit de convolution en $x \in \mathbb{R}^n$, s'il existe, est $f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$

Proposition (Inégalité de Young) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $p, q, r \in [1;+\infty]$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = \frac{1}{r}+1$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Alors $f*g$ est définie sur $\mathbb{R}^n$, et est dans $L^r(\mathbb{R}^n)$. De plus l'application convolution $L^p \times L^q \to L^r$ est bilinéaire continue de norme 1.

. Remarque. Il n'y a pas d'unité pour la convolution, pour combler ce manque on utilise la notion suivante.

. Définition : $(f_j)_j \in L^1(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité si :

i) $\forall j \in \mathbb{N}$, f_j est à support dans $\overline{B}(0,t_j)$ où $(t_j)_j \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec $t_j \xrightarrow[j]{} 0$;

ii) $\forall j \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}^n} |f_j| d\lambda_n \leq M < +\infty$ avec $M \geq 0$ indépendant de j ;

iii) $\forall j \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}^n} f_j d\lambda_n = 1$

. Proposition : Pour $(f_j)_j$ une approximation de l'unité, $p \in [1;+\infty]$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, on a $\|f_j * g - g\|_p \xrightarrow[j]{} 0$

II.3) Parties denses dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p<+\infty$

. Proposition : L'espace $C_c(\mathbb{R}^n)$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, pour $p \in [1;+\infty[$

. Proposition. L'adhérence de $C_c(\mathbb{R}^n)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ est $C_0(\mathbb{R}^n)$, l'espace des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini.

. Proposition : L'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ des fonctions de classe C^∞ à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, pour $p \in [1;+\infty[$

II.4) Séparabilité des $L^p(\mathbb{R}^n)$

Théorème. Pour $p \in [1;+\infty[$, $n \in \mathbb{N}^*$, $L^p(\mathbb{R}^n)$ est séparable.

Proposition : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ n'est pas séparable.

II - (...) La transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^n)$

• Remarque : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la transformée de Fourier est l'application uniformément continue $\mathcal{F}$ qui a $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ associe l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ par
$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} f(x)\, d\lambda_n(x)$

avec $(x,\xi) \to x.\xi$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$

• Proposition : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

• Théorème (de Plancherel) : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ se prolonge par continuité en un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^n)$ et on a, pour $\xi \in \mathbb{R}^n$,
$\mathcal{F}(f)(\xi) = \lim_{R \to +\infty} \int_{|x|<R} e^{ix.\xi} f(x)\, d\lambda_n(x)$

III Dualité, réflexivité

Théorème : Soient p,q conjugués dans $[1;+\infty]$, $g \in L^q(\mu)$, alors $\phi_g : L^p(\mu) \to \mathbb{K}$, $f \mapsto \int_X fg\, d\mu$ est une forme linéaire continue sur L^p, de norme $\leq \|g\|_q$ avec égalité dès que $p \neq 1$ ou que $(X,\mathcal{M},\mu)$ est σ-fini.

Théorème : Soient p,q conjugués dans $[1;+\infty]$, avec $p \neq +\infty$, alors l'application $\phi : L^q(\mu) \to (L^p(\mu))'$ (le dual topologique de L^p) définie par $\phi(g) = \phi_g$ est une bijection linéaire continue ;
Ainsi on a $(L^p(\mu))' \simeq L^q(\mu)$

Remarque : En général, $L^1(\mu)$ n'est isomorphe qu'à une partie de $(L^\infty(\mu))'$. En particulier $L^1(\mathbb{R}^n) \simeq A \subsetneq (L^\infty(\mathbb{R}^n))'$.

Corollaire : Pour $p \in]1;+\infty[$, $L^p(\mu)$ est réflexif.

Remarque. L^1 et L^∞ ne sont, en général, pas réflexifs.

IV Exercices

Théorème (Inégalité de Hardy) : Soit $p > 1$, un réel, et $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$. On pose $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$, on a $F \in L^p(\mathbb{R}_+)$ et $\int_0^\infty |F(x)|^p dx \leq \left(\frac{p}{1-p}\right)^p \int_0^\infty |f(t)|^p dt$

De plus la constante $\left(\frac{p}{1-p}\right)^p$ est optimale. **DEV 1**

Théorème (de Grothendieck) : Soit (Ω,μ) un espace probabilisé, et $p \geq 1$, un réel. Soit S un sous-espace vectoriel fermé de $L^p(\mu)$ tel que, en plus, $S \subset L^\infty(\mu)$.
Alors S est de dimension finie. **DEV 2**

Références :

• Collectif de mathématicien·ne·s, sous la direction de J.-P. Marco – Mathématiques Analyse L3
• Haïm Brezis – Analyse fonctionnelle, théorie et applications
• A. Chambert-Loir, S. Fermigier, V. Maillot – Exercices de mathématiques pour l'agrégation – Analyse 1
• Maxime Zavidovique – Un Max de Math
• Thierry Gondon – Intégration, intégrale de Lebesgue (...)

Chapitre 1

Développements

On peut proposer ces deux théorèmes sous forme d'exercices liés au cours.

1.1 Inégalité de Hardy

Théorème 1.1.1. *Soit $p > 1$ un réel et $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$. On pose $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ on a $F \in L^p(\mathbb{R}_+)$ et*

$$\int_0^\infty |F(x)|^p dx \leq (\frac{p}{p-1})^p \int_0^\infty |f(t)|^p dt$$

De plus la constante $(\frac{p}{p-1})^p$ est optimale.

Démonstration La démonstration se fait en plusieurs étapes :

— On montre le résultat en supposant f positive et continue (et réelle bien sûr, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

— On en déduit le résultat pour f seulement continue.

— On conclut pour f quelconque dans $L^p(\mathbb{R}_+)$ par densité.

— On montre que la constante est optimale.

∘ On suppose donc f continue et positive pour commencer. On en déduit que par définition F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+$ (prolongeable par continuité en 0, avec $F(0) = f(0)$). En la dérivant on obtient l'équation différentielle

$$xF' = -F + f \tag{1.1}$$

Ainsi $\forall A > 0$ on a

$$\int_0^A F^p = \int_0^A F^{p-1}F = \int_0^A F^{p-1}f - \int_0^A xF'F^{p-1} \tag{1.2}$$

Et en intégrant par partie la dernière intégrale (on dérive x et on intègre $F'F^{p-1}$)

$$\int_0^A xF'F^{p-1} = \frac{1}{p}[xF^p]_0^A - \frac{1}{p}\int_0^A F^p \tag{1.3}$$

Et en regroupant *(3.2)* et *(3.3)* on obtient

$$\frac{p-1}{p}\int_0^A F^p = -\frac{A}{p}F^p(A) + \int_0^A F^{p-1}f \leq \int_0^A F^{p-1}f$$

L'inégalité étant obtenue par positivité de f. On applique alors l'inégalité de Hölder.

$$\frac{p-1}{p}\int_0^A F^p \leq (\int_0^A F^p)^{\frac{p-1}{p}}(\int_0^A f^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$\int_0^A F^p \leq (\frac{p}{p-1})^p \int_0^A f^p$$

Ce qui nous livre le caractère L^p de F et l'inégalité dans le cas f continue et positive.

∘ Dans le cas où f n'est pas (réelle) positive mais reste continue on applique ce qui précède à $\phi = |f|$ continue et positive et $\Phi = \frac{1}{x}\int_0^x \phi$. Ainsi $|F| \leq \Phi$ et donc

$$\int_0^A |F|^p \leq \int_0^A \Phi^p \leq (\frac{p}{p-1})^p \int_0^A \phi^p = (\frac{p}{p-1})^p \int_0^A |f|^p$$

Ce qui conclut la deuxième partie de la démonstration.

∘ On pose $T : L^p(\mathbb{R}_+) \cap \mathscr{C}^0 \to L^p(\mathbb{R}_+), f \mapsto F$ linéaire, continue d'après ce qu'on vient de montrer ; donc qui se prolonge linéaire, continue et de même norme à $\overline{L^p(\mathbb{R}_+) \cap \mathscr{C}^0} = L^p(\mathbb{R}_+)$ par densité des fonctions continues à support compact dans $L^p(\mathbb{R}_+)$ (et donc des fonctions continues).

∘ Pour l'optimalité de la constante on pose $f : x \mapsto \mathbb{1}_{]0;A]}x^{-\frac{1-\varepsilon}{p}}$ pour $1 > \varepsilon > 0$ fixé. Qui est bien dans $L^p(\mathbb{R}_+)$ de plus pour $x \in]0;A]$

$$F(x) = \frac{1}{x} \times \frac{p}{p-1+\varepsilon}x^{-\frac{1-\varepsilon}{p}+1} = \frac{p}{p-1+\varepsilon}f(x)$$

donc

$$\int_0^\infty F^p \geq \int_0^A F^p = (\frac{p}{p-1+\varepsilon})^p \int_0^A f^p = (\frac{p}{p-1+\varepsilon})^p \int_0^\infty f^p$$

Ceci étant vrai pour tout ε on obtient bien l'optimalité de la constante $(\frac{p}{p-1})^p$.

1.2 Un théorème de Grothendieck

Théorème 1.2.1. *Soit (Ω, μ) un espace probabilisé et $p \geq 1$ un réel. Soit $S \subset L^p(\mu)$ sous espace vectoriel fermé tel qu'en plus $S \subset L^\infty(\mu)$. Alors S est de dimension finie.*

Démonstration La preuve qu'on va donner se déroule en plusieurs étapes. La conclusion peut se faire de diverses manières, on indiquera quelques variantes possibles. Voici les étapes :

— On montre que $\|.\|_p$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes sur S.

— On montre que $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes sur S (avec toutes ces équivalences de normes on a déjà un petit goût de dimension finie).

— On se sert du produit scalaire induit par $\|.\|_2$ pour majorer de manière uniforme le cardinal de toute famille finie libre.

∘ Étant dans un espace de mesure finie $\|.\|_\infty$ est plus fine que $\|.\|_p$. Il reste donc à montrer que $\|.\|_p$ plus fine que $\|.\|_\infty$. On a $S \subset L^p(\mu)$ fermé donc S est un espace de Banach pour la norme p.
Soit $(f_n)_n \in S^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour la norme $\|.\|_\infty$.
On a $\|.\|_p \leq \|.\|_\infty$ donc c'est aussi une suite de Cauchy pour $\|.\|_p$ or S est complet pour cette norme donc $(f_n)_n$ admet une limite f. On a aussi $(f_n)_n \in (L^\infty)^{\mathbb{N}}$ et L^∞ complet donc il existe $\tilde{f}$ une autre limite de $(f_n)_n$. On a

$$\left\|f - \tilde{f}\right\|_p \leq \|f - f_n\|_p + \left\|f_n - \tilde{f}\right\|_p \leq \|f - f_n\|_p + \left\|f_n - \tilde{f}\right\|_\infty$$

Il reste à faire tendre n vers l'infini. Ainsi on a $f = \tilde{f}$ presque partout. Donc $(S, \|.\|_\infty)$ est aussi un espace de Banach. Donc on peut appliquer le théorème de l'application ouverte à $id : (S, \|.\|_\infty) \longrightarrow (S, \|.\|_p)$ qui est bien linéaire continue et surjective, on obtient que id est ouverte. Donc id^{-1} est continue aussi et donc les topologies induites par $\|.\|_p$ et $\|.\|_\infty$ sont les mêmes. En général, un espace ne peut avoir deux structures d'espace de Banach dont l'une est strictement plus fine que l'autre.
Remarque On aurait aussi bien pu appliquer le théorème du graphe fermé à $id : (S, \|.\|_p) \longrightarrow (S, \|.\|_\infty)$, les vérifications sont les mêmes et la conclusion aussi.
Deux normes étant équivalentes si (et seulement si) elles sont topologiquement équivalentes, il existe donc une constante $K > 0$ telle que pour tout f dans S

$$\|f\|_\infty \leq K \|f\|_p \tag{1.4}$$

∘ On montre maintenant que $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes. On remarque d'abord que, $\mu(X)$ étant finie, on a $L^\infty(\mu) \subset L^2(\mu)$, donc $\|.\|_2$ est bien une norme sur S. Comme ci-dessus, il suffit de montrer que $\|.\|_2$ est plus fine que $\|.\|_\infty$. Si $p \leq 2$, $\|.\|_2$ est plus fine que $\|.\|_p$, donc plus fine que $\|.\|_\infty$. Supposons donc $p > 2$. $\forall f \in S$, $\exists N$ de mesure nulle tel que

$$\forall x \notin N, |f(x)| \leq \|f\|_\infty$$

Ainsi $|f(x)|^{p-2} \leq \|f\|_\infty^{p-2}$ et par suite

$$|f(x)|^p \leq \|f\|_\infty^{p-2} |f(x)|^2$$

en intégrant

$$\|f\|_p^p \leq \|f\|_\infty^{p-2} \|f\|_2^2$$

Puis d'après la relation (3.4), on a $K^{-p} \|f\|_\infty^p \leq \|f\|_p^p$ et donc, $K^{-p} \|f\|_\infty^p \leq \|f\|_\infty^{p-2} \|f\|_2^2$ En prenant la racine carrée de cette dernière on clôt la preuve et ainsi $\exists M > 0$ tel que :

$$\|f\|_\infty \leq M \|f\|_2 \tag{1.5}$$

∘ On peut alors munir S du produit scalaire induit par $\|.\|_2$, ce qu'on fait. On veut montrer que S est de dimension finie c'est-à-dire que le cardinal de toute famille libre est majoré. Soit $n \in \mathbb{N}$. On choisit $(f_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ une famille libre de n vecteurs, qu'on peut supposer orthonormée quitte à utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gramm Schmidt. On veut alors prouver que n est majoré. On peut choisir N de mesure nulle telle que

$$\forall x \notin N, \forall i, |f_i(x)| \leq \|f_i\|_\infty$$

(prendre $N = \cup_{i=1}^n N_i, N_i$ tel que $\forall x \in N_i,\ |f_i(x)| \leq \|f_i\|_\infty$ et utiliser la sous-additivité de la mesure). Ainsi pour $x \notin N$ fixé, c_i des scalaires de $\mathbb{K}$.

$$\left|\sum_{i=1}^n c_i f_i(x)\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^n c_i f_i\right\|_\infty \leq M \left\|\sum_{i=1}^n c_i f_i\right\|_2 =$$

$$= M\sqrt{\int_\Omega \left|\sum_{i=1}^n c_i f_i\right|^2} \leq M\sqrt{\sum_{i,j} \left|c_i c_j \int_\Omega f_i f_j\right|} = M\sqrt{\sum_{i=1}^n |c_i|^2}$$

En particulier pour les c_i valant respectivement $\overline{f_i(x)}$

$$\sum_{i=1}^n |f_i(x)|^2 \leq M\sqrt{\sum_{i=1}^n |f_i(x)|^2}$$

Donc

$$\sum_{i=1}^n |f_i(x)|^2 \leq M^2$$

(toujours valable même si $\sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|^2 = 0$). Puis en intégrant

$$n \leq M^2$$

La constante M étant indépendante du choix de la famille $(f_i)_i$ on a bien majoré de manière uniforme le cardinal de toute famille libre finie. Ce qui serait contradictoire avec le fait que S soit de dimension infinie.
Donc S est de dimension finie.

Remarque Signalons une petite variante dans le cadre où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ n'utilisant pas la structure hilbertienne de S mais des notions de topologie faible et de réflexivité. On ne se servira que de ce qui a été fait sur l'équivalence des normes ∞ et p, et on jonglera indifféremment entre chacune.
On remarque que les formes linéaires $\phi_x : \mathscr{C}_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{K}$ dirac en x qui sont bien définies sur $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ (fonctions infiniment dérivables et à support compact) et continues pour $\|.\|_\infty$ et de norme 1 donc par le théorème de Hahn-Banach analytique on peut les prolonger à L^∞ tout entier continues de norme 1. Donc en particulier elles sont bien définies sur S. On rappelle que S est fermé dans $L^p(\mu)$ donc réflexif et donc par le théorème de Kakutani la boule unité de S est compacte pour la topologie faible. En termes moins savants : de toute suite $(f_n)_n$ de la boule unité, pour toute forme linéaire ϕ de S on peut extraire une sous suite de $(f_{n_k})_k$ telle que $(\phi(f_{n_k}))_k$ converge. Ce que nous faisons : on fixe $(f_n)_n \in B_S(0,1)^{\mathbb{N}}$ et pour les diracs citées plus haut en x par extraction d'une sous suite on construit $f(x) \leq 1$. S étant dans $L^p(\mu)$ séparable il est lui même séparable. Donc f est une valeur d'adhérence de la suite (la séparabilité permet d'utiliser le processus d'extraction diagonale pour construire une sous suite de $(f_n)_n$ telle que tous les diracs convergent pour cette sous suite ce qui n'est pas faisable en général). On en conclut que la boule unité de S est compacte donc par le théorème de Riesz S est de dimension finie.