234

Espaces L^p, $1 \leq p \leq +\infty$.

Cadre : On pose $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et on note $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Sauf mention du contraire, $p \in [1, +\infty]$.

I – Construction des espaces $L^p(\mu)$.

1) Espaces $\mathcal{L}^p$ et ℓ^p.

Déf 1. On pose $\|f\|_\infty = \inf\{M>0 \mid f \leq M \text{ pp}\}$ et pour $p \neq +\infty$: $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$.

Déf 2. On définit les espaces $\mathcal{L}^p(\mu)$ par :
$$\mathcal{L}^p(\mu) := \{f : X \to K \text{ mes} \mid \|f\|_p < +\infty\}$$

Ex 3. Espaces de Lebesgue $(X, \mathcal{T}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \eta)$ où η mesure de comptage. Alors on a $\mathcal{L}^p(\eta) = \ell^p(\mathbb{N}) = \{(x_n)_n \mid \sum_1 |x_n|^p < +\infty\}$ et pour $p = +\infty$ $\ell^\infty(\mathbb{N}) = \{(x_n)_n \text{ bornée}\}$

2) Espace $L^p(\mu)$.

Déf 4. On pose $L^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu) / N$ où $N = \{f \text{ mes} \mid \|f\|_p = 0\}$. C'est donc un ensemble de classe d'équivalence.

Thm 5. Inégalité de Minkowski :
$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Thm 6. Cauchy Schwarz. $f, g \in L^2$
$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2 \text{ donc } fg \in L^1.$$

Hölder : $f \in L^p$, $g \in L^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$:
$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \text{ donc } fg \in L^r.$$

Prop 7. $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé.

Rq 8. Sur $\mathcal{L}^p$, $\|\cdot\|_p$ n'est qu'une semi-norme : $\mathbb{1}_N$.

Thm 9. $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est complet. * DEV
De plus, toute suite de Cauchy admet une sous suite qui converge μ-presque partout.

II – Propriétés des espaces L^p.

1) Convergence L^p.

Déf 10. $f_n \in L^p$. $f_n \xrightarrow{L^p} f$ si $\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Rq 11. La convergence L^p n'implique pas la convergence presque partout. CE. Bosses glissantes.

Thm 12. Convergence dominée.
Soit $f_n \in L^p$, $f_n \to f$ pp. Si $\exists g \in L^p$ tel que $\forall n$ $|f_n| \leq g$, alors $f \in L^p$ et $f_n \xrightarrow{L^p} f$.

C.E. 13. $f_n = \mathbb{1}_{[0,n]}$ ou $f_n = n\mathbb{1}_{[0,1/n]}$.

Prop 14. Si μ est finie, $q \leq p$: $\|\cdot\|_q \leq \mu(X)^{\frac{p-q}{pq}} \|\cdot\|_p$.
Ainsi $L^p \subseteq L^q$ et CV $L^p \Rightarrow$ CV L^q.

Prop 15. Soit $f\in L^p\cap L^q$. Alors pour $\frac{\theta}{p}+\frac{1-\theta}{q}=\frac{1}{R}$
$\|f\|_R \leq \|f\|_p^{\theta}\|f\|_q^{1-\theta}$ et $f\in L^R$ $\forall R\in[p,q]$.

2) Densité.

Prop 16. Les fonctions étagées de L^p sont dense dans L^p.

Thm 17. Pour $p\neq+\infty$, $C_c^0(X)$ est dense dans L^p pour la norme $\|\cdot\|_p$.

App. 18. L^p est séparable pour $p\neq+\infty$.

Rq 19. Si $p=+\infty$ et supp(μ) infini, L^p pas séparable

3) Dualité

Thm 20. Riesz (admis) Pour $p\neq 1,+\infty$, il existe un isomorphisme isométrique entre $(L^p)'$ et L^q avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. De plus $(L^1)' \underset{\text{isométrique}}{=} L^\infty$ mais $L^1 \not\subseteq (L^\infty)'$. Les L^p, $p\neq1,\infty$, sont reflexifs.

Cor 21. Pour $f\in L^p$, $\|f\|_p=\sup\limits_{\substack{g\in L^q\\ \|g\|_q=1}}\int_X fg\,d\mu$.

4) Cas L^2.

Thm 22. Muni du produit scalaire :
$\langle f,g\rangle=\int_X f\bar{g}\,d\mu$, L^2 est un Hilbert.

Thm 23. Représentation de Riesz.
Soit F une forme linéaire sur L^2, alors il existe un unique $g\in L^2$: $\forall f\in L^2$ $F(f)=\langle f,g\rangle$.

App. 24. Radon Nikodym.

Thm 25. Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.

Thm 26. Si E est un Hilbert séparable de dimension infinie et $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une base hilbertienne alors l'égalité de Bessel $\|x\|^2=\sum_i\langle x,e_n\rangle$ montre que E est isométriquement isomorphe à ℓ^2.

Ex 27. $(e^{2i\pi nt})_n$ est une base hilbertienne de $L^2([0,1])$

III – Applications

1) Convolution

Def 28. Soit f,g boréliennes positives. On pose :
$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,dy\in[0,+\infty]$

Prop 29. $*$ est commutatif et associatif quand bien défini mais n'admet pas d'élément neutre dans L^1.

Prop 30. Inégalité de Young. $f\in L^p$, $g\in L^q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$
$\|f*g\|_1\leq\|f\|_p\|g\|_q$

Ex 31. Sur $[0,1]$: $\|f*x^n\|_1\leq\|f\|_p\|x^n\|_q\leq\|f\|_p\left(\frac{1}{nq+1}\right)^{1/q} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Prop 32. $(L^1,*)$ est une algèbre : $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

Def 33. Une suite régularisante est une suite $\rho_n \in C_c^\infty$ telle que $\rho_n \geq 0$, $\int \rho_n = 1$, $\mathrm{supp}(\rho_n) \subseteq B(0,\frac{1}{n})$

Prop 34. $f \in L^p$ et $(\rho_n)_n$ suite régularisante. Alors $\rho_n * f \longrightarrow f$ dans L^p

App 35. C_c^∞ est dense dans L^p, $p \neq +\infty$.

Ex 36. Construction d'une suite régularisante.

$\psi(x) := \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) \mathbb{1}_{|x|<1}$. $c := \int \psi$.

Posons $\rho = c^{-1}\psi$ et $\rho_n(x) = n\rho(nx)$.

2) Transformées de Fourier et bases hilbertiennes

Def 37. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. La transformée de Fourier de f est $\hat{f} : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)\, dx$

Prop 38. Riemann-Lebesgue.

Soit $f \in L^1$. Alors $\lim_{\xi \to \pm\infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$.

Prop 39. $\hat{f}'(\xi) = -i\,(\widehat{xf})(\xi)$

$\widehat{f'}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$

Prop 40. $f,g \in L^1$. $\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}$.

Thm 41. Si $f \in L^1$ alors $\hat{f} \in \mathcal{C}^0$ et $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$

Thm 42. Inversion de Fourier.

Soit $f \in L^1$. Si $\hat{f} \in L^1$ alors $g(x) := \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{ixt} dt$ est continue et $f = g$ pp.

Prop 43. La transformée de Fourier est injective sur L^1.

Thm 44. Plancherel

La transformée de Fourier de $L^1 \longrightarrow L^1$ s'étend en un isomorphisme d'espace de Hilbert $L^2 \longrightarrow L^2$.

Def 45. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. On définit un produit scalaire :

$$\langle f,g \rangle_\rho := \int_I f\bar{g}\rho\, dx$$

Et l'espace $L^2(I,\rho)$ comme les fonctions de norme associée finie.

Thm 46. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. Si il existe $a>0$ tel que $\int_I e^{a|x|}\rho(x)\,dx < \infty$ alors la familles des polynômes orthogonaux pour ρ est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

Ex 47. Pol. d'Hermite : $I = \mathbb{R}$, $\rho = e^{-x^2}$. $P_n = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$

Pol. Legendre. $I = [-1,1]$, $\rho = 1$. $P_n = \frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)$.

Références :

Plan : * Rudin
* Hirsch Lacombe
* Brézis
* Briane et Pagès

Dev Riesz-Fischer : Rudin et Brézis.
Dev Polynômes orthogonaux : Beck, Malick, Peyré.