234

Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré, et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Théorie de l'intégration de Lebesgue

1) Construction de l'intégrale de Lebesgue

Définition 1 : . $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ est mesurable si pour tout $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

. Si f est mesurable, f est dite étagée si elle prend un nombre fini de valeurs.

Remarque 2 : f est étagée si et seulement s'il existe I fini, $(\alpha_i)_{i\in I} \in Y^I$ et $(A_i)_{i \in I}$ une partition mesurable de X tels que $f = \sum_{i\in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$.

Lemme 3 (Approximation) : Soit $f : (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurable. Il existe une suite de fonctions étagées positives $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $x \in X$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$. De plus :

- si f est positive, on peut choisir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante positive ;
- si f est bornée, on peut choisir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f.

Définition 4 : Soit $\mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}$ l'ensemble des fonctions étagées positives et $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}$.

Si $f = \sum_{i\in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, l'intégrale (de Lebesgue) de f est $\int_X f \, d\mu = \sum_{i\in I} \alpha_i \mu(A_i)$

. Soit $\mathcal{M}_+$ l'ensemble des fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Si $f \in \mathcal{M}_+$, on définit $\int_X f\,d\mu = \sup\{\int_X \varphi\, d\mu,\ \varphi \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+},\ \varphi \leq f\}$

Proposition 5 : . Les deux définitions coïncident sur $\mathcal{E}_{\mathbb{R}_+} \subset \mathcal{M}_+$.

. $\forall f, g \in \mathcal{M}_+,\ f \leq g \Rightarrow 0 \leq \int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu$ (positivité)

Exemples 6 : . Si δ_x est la mesure de Dirac en x et si $f \in \mathcal{M}_+$, $\int_X f\, d\delta_x = f(x)$

. Si m est la mesure de comptage et si $f \in \mathcal{M}_+$, $\int_{\mathbb{N}} f\,dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$

Théorème 7 (Beppo Levi / convergence monotone) : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions de $\mathcal{M}_+$. Alors, $f := \lim_{n\to+\infty} f_n \in \mathcal{M}_+$, et $\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\, d\mu$

Définition 8 : . $f \in \mathcal{M}_+$ est dite intégrable (par rapport à μ) si $\int_X f\,d\mu < +\infty$.

. Pour $f : (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurable, on note $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = \max(-f, 0)$

Si $|f|$ est intégrable, on dit que f est également intégrable, en définissant :

$\int_X f\,d\mu := \int_X f_+\,d\mu - \int_X f_-\,d\mu$ (on remarque que f_+ et f_- sont intégrables)

. Si $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ est mesurable et si $|f|$ est intégrable, alors $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont intégrables au sens précédent. On dit que f est également intégrable, en définissant $\int_X f\,d\mu := \int_X \operatorname{Re}(f)\,d\mu + i \int_X \operatorname{Im}(f)\,d\mu$

Proposition 9 : L'intégrale des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ est linéaire et positive.

- Si $A \in X$, $\int_A f_{|A}\, d\mu = \int_X \mathbb{1}_A f\, d\mu$
- Si f est intégrable, alors f est finie μ-presque partout (μ-p.p.)
- Si f est mesurable positive et si $\int_X f\,d\mu = 0$, alors $f = 0$ presque partout sur X
- Si f est intégrable, $|\int_X f\,d\mu| \leq \int_X |f|\,d\mu$, avec égalité si f est de signe constant μ-p.p.

Théorème 10 : Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-intégrable. Il existe $g : [a,b] \to \mathbb{K}$ λ-Lebesgue-intégrable telle que $f = g$ λ-p.p. et $\int_a^b f = \int_{[a,b]} g\, d\lambda$.

Si de plus f est mesurable, alors f est λ-Lebesgue-intégrable et $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f\, d\lambda$.

Contre-exemple 11 : La réciproque est fausse, car $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ est λ-Lebesgue-intégrable mais pas Riemann-intégrable.

2) Régularité d'intégrales à paramètres

Lemme 12 (Fatou) : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{M}_+$. Alors :

$$0 \leq \int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n\, d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n\, d\mu$$

Remarque 13 : L'inégalité peut être stricte, comme avec $f_n = \mathbb{1}_{[n, n+1]}$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. $\liminf_{n\to+\infty} f_n = 0$ mais $\int_X f_n\, d\lambda = 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), donc $\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to+\infty} f_n\, d\lambda < \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda$

Théorème 14 (convergence dominée) : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables telles que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$ pour presque tout x. On suppose qu'il existe g intégrable telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ-p.p.

Alors, il existe f intégrable telle que $\int_X |f_n - f|\, d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En particulier, on a μ-p.p., $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ et $\int_X f_n\, d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_X f\, d\mu$.

Exemple 15 : Soit f intégrable sur $[0,1]$ et admettant une limite à gauche en 1.

Alors, $\int_0^1 x^n f(x)\, dx \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f(1^-)}{n}$

Contre-exemple 16 : La majoration uniforme en n est nécessaire. En effet, soit pour $n \geq 1$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{n} \times \mathbb{1}_{[n, 2n]}(x)$. f_n est intégrable et $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Or, $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx = 1$, pour tout $n > 0$.

Théorème 17 : Soit (E, d) un espace métrique, $u_0 \in E$ et $f : E \times X \to \mathbb{K}$. On suppose :

- $\forall u \in E$, $x \mapsto f(u, x)$ mesurable ;
- μ-p.p., $u \mapsto f(u, x)$ continue en u_0 ;
- il existe g intégrable sur X telle que ; μ-p.p., $\forall u \in E$, $|f(u,x)| \leq g(x)$

Alors, $u \mapsto \int_X f(u, x)\, d\mu(x)$ est continue en u_0.

Théorème 18 (dérivation sous l'intégrale) : Soit $f : I \times X \to \mathbb{K}$, avec I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

On suppose que :

- $\forall u \in I$, $x \mapsto f(u, x)$ est intégrable sur X ;
- μ-p.p., $u \mapsto f(u, x)$ est dérivable sur I ;
- il existe g intégrable sur X telle que : μ-p.p., $\forall u \in I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial u}(u, x)\right| \leq g(x)$

Alors $u \mapsto \int_X f(u, x)\, d\mu$ est dérivable sur I, de dérivée $u \mapsto \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u, x)\, d\mu$

Exemple 19 : $f : t \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin x}{x}\, dx$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et :

$$f'(t) \underset{t\to 0}{\sim} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

Théorème 20 (Holomorphie sous l'intégrale): Soit $f: O\times X \to \mathbb{C}$, avec O un ouvert de $\mathbb{C}$.
On suppose que :
- $\forall z\in O$, $x\mapsto f(z,x)$ est intégrable sur X ;
- μ-p.p., $z\mapsto f(z,x)$ est holomorphe sur O ;
- il existe g intégrable sur X telle que : μ-p.p., $\forall z\in O, |f(z,x)|\le g(x)$

Alors, $z\mapsto \int_X f(z,x)\,d\mu$ est holomorphe sur O, de dérivée holomorphe $z\mapsto \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z,x)\,d\mu$

Exemple 21 : La fonction $\Gamma : \begin{cases}\{Re(z)>0\} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt\end{cases}$ est holomorphe sur $\{Re(z)>0\}$ et pour tout $z\in\{Re(z)>0\}$, $\Gamma'(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\ln t\,dt$

3) Changements de coordonnées

Théorème 22 (changement de variables) : Soit φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre Δ et O deux ouverts de $\mathbb{R}^d$, et J_φ son Jacobien. Soit $f: O\to \mathbb{K}$ mesurable. f est λ_O-intégrable si et seulement si $(f\circ\varphi)|J_\varphi|$ est λ_Δ-intégrable, et on a l'égalité :

$$\int_O f(x)\,dx = \int_\Delta f\circ\varphi(u)\,|J_\varphi(u)|\,d\mu$$

Application 23: le volume d'une boule de rayon R est égal à $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Théorème 24 (Fubini-Tonelli): Soit $f:(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B})\to \overline{\mathbb{R}}_+$, mesurable, avec μ et ν σ-finies.
- $x\mapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu$ et $y\mapsto\int_X f(x,y)\,d\mu$ sont $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$-mesurables respectivement.
- $\int_{X\times Y} f(x,y)\,d\mu\otimes d\nu = \int_X\left(\int_Y f(x,y)\,d\nu\right)d\mu = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\,d\mu\right)d\nu$.

Exemple 25: $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi}$

Théorème 26 (Fubini): Soit $f: X\times Y\to\overline{\mathbb{R}}$ intégrable par rapport à $\mu\otimes\nu$, avec μ et ν σ-finies.
- μ-p.p. $y\mapsto f(x,y)$ est intégrable pour ν et ν-p.p., $x\mapsto f(x,y)$ est intégrable pour μ.
- $x\mapsto\int_Y f(x,y)\,d\nu$ et $y\mapsto\int_X f(x,y)\,d\mu$ sont intégrables.
- $\int_{X\times Y} f\,d\mu\otimes d\nu = \int_X\left(\int_Y f(x,y)\,d\nu\right)d\mu = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\,d\mu\right)d\nu$

Contre-exemple 27: $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ n'est pas $\lambda\otimes\lambda$-intégrable sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
- $\int_X\left(\int_Y f(x,y)\,dy\right)dx = \frac{\pi}{4}$ et $\int_Y\left(\int_X f(x,y)\,dx\right)dy = -\frac{\pi}{4}$

II) Espaces $L^p_\mu(X)$ et généralisations

1) Structure d'espace vectoriel normé

Définition 28: - On définit, pour $p\in[1,+\infty[$, $\mathcal{L}^p_\mu(X) = \{f: X\to\mathbb{K}, \int_X |f|^p\,d\mu < +\infty\}$.
- On définit $\mathcal{L}^\infty_{\mathcal{A}}(X) = \{f: X\to\mathbb{K}, \exists M>0, \mu(\{x\in X, |f(x)|>M\})=0\}$.

Remarque 29: S'il n'y a pas d'ambiguïté, on omet μ et $\mathcal{A}$ des notations.

Proposition 30 : Soit $f: X\to\mathbb{K}$ mesurable et $p\in[1,+\infty[$. $\int_X|f|^p = 0 \Leftrightarrow f=0$ μ-p.p.

Définition 31 : Soit $p\in[1,+\infty]$. On définit $L^p_\mu(X) = \mathcal{L}^p_\mu(X)/\sim$, avec $f\sim g \Leftrightarrow f=g$ μ-p.p.

Proposition 32 (Hölder-Minkowski): - Soient $f\in L^p_\mu(X)$ et $g\in L^q_\mu(X)$, où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et $p,q\in[1,+\infty]$.
Alors, $fg\in L^1(X)$, et $\int|fg|\,d\mu \le \left(\int|f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int|g|^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$

- Soient $f,g\in L^p(X)$. $f+g\in L^p(X)$, et $\left(\int|f+g|^p\,d\mu\right)^{1/p} \le \left(\int|f|^p\,d\mu\right)^{1/p} + \left(\int|g|^p\,d\mu\right)^{1/p}$

Définition 33 : - Pour $p\in[1,+\infty[$, on définit $\|.\|_p : f\in L^p(X)\mapsto\left(\int|f|^p\,d\mu\right)^{1/p}$
- On définit $\|.\|_\infty : f\in L^\infty(X)\mapsto \inf\{M>0, \mu(\{x\in X, |f(x)|>M\})=0\}$.

Proposition 34 : Pour $p\in[1,+\infty]$, $(L^p_\mu(X), \|.\|_p)$ est un espace vectoriel normé.

Proposition 35: Soient $1\le p<q<+\infty$.
- Si $\mu(X)<+\infty$, $L^q(X)\subset L^p(X)$
- Si μ est la mesure de comptage, $L^p(X)\subset L^q(X)$

DEVELOPPEMENT N°1

Théorème 36 (Riesz-Fischer): Si $p\in[1,+\infty]$, $(L^p_\mu(X), \|.\|_p)$ est complet.

Application 37: $(L^2(X), (f,g)\mapsto\int_X f\bar{g}\,d\mu)$ est un espace de Hilbert.

2) Convolution

Proposition 38: Si $p\in[1,+\infty[$ et si X est un ouvert de $\mathbb{R}$, l'ensemble des fonctions continues à support compact dans X est dense dans $(L^p_\lambda(X), \|.\|_p)$.

Application 39: Si $a\in\mathbb{R}$, on définit $\tau_a : \begin{cases} L^p(\mathbb{R})\longrightarrow L^p(\mathbb{R}) \\ f\longmapsto f(\cdot-a)\end{cases}$ la translation par a. τ_a est continue pour $\|.\|_p$ et :
$\forall f\in L^p(\mathbb{R}), \|\tau_a(f)-f\|_p \xrightarrow[a\to 0]{} 0$

Définition-proposition 40: Soient $f\in L^1(\mathbb{R})$ et $g\in L^p(\mathbb{R})$, avec $1\le p<+\infty$. Alors, l'application $f*g : x\mapsto\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy$ est définie presque partout et $f*g\in L^p(\mathbb{R})$. De plus : $\|f*g\|_p\le\|f\|_1\|g\|_p$. $f*g$ est appelée convolée de f par g.

Remarques 41: - Par changement de variables affine, $f*g=g*f$ pour tous $f,g\in L^1(\mathbb{R})$.
- Il n'existe pas de fonction $f\in L^1(\mathbb{R})$ telle que pour tout $g\in L^1(\mathbb{R})$, $f*g=g$.

Définitions 42: Une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(L^1(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité si :
- $\forall n\ge 0, \int_{\mathbb{R}}\alpha_n\,d\lambda = 1$;
- $\sup_{n\ge 1}\left(\int_{\mathbb{R}}|\alpha_n|\,d\lambda\right) < +\infty$;
- $\forall\varepsilon>0, \int_{\{|x|\ge\varepsilon\}}|\alpha_n|\,d\lambda\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

- Une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(L^1(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ est dite régularisante si :
- $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité ;
- $\forall n\ge 0, \alpha_n\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Proposition 43: - Si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité et si $f\in L^p(\mathbb{R})$, $\alpha_n*f\xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ pour la norme $\|.\|_p$, i.e. $\|\alpha_n*f-f\|_p\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- Si $\alpha\in L^1(\mathbb{R})\cap\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, alors $\alpha*f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

Théorème 44: On note $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}$. $(\mathcal{D}(\mathbb{R}), \|.\|_p)$ est dense dans $(L^p, \|.\|_p)$ pour $p\in[1,+\infty[$.

Application 45: Soient $f\in L^1(\mathbb{R})$ et $g\in L^2(\mathbb{R})$. On définit $\mathcal{F}$ l'opérateur de transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$, qui coïncide avec l'opérateur de Fourier sur L^1.
Alors, $\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g)$

3) Espaces de distributions

<u>Définition 46</u> : - On note $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ intégrables sur tout intervalle borné (ou sur tout compact, ce qui est équivalent sur $\mathbb{R}$)
- Une forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est une distribution si pour tout compact K de $\mathbb{R}$: $\exists N_K \in \mathbb{N}, \exists C_K\in\mathbb{R}, \forall \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}), |T(\varphi)|\le C_K \max_{n\le N_K}\|\varphi^{(n)}\|_\infty$

On note $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'ensemble des distributions sur $\mathbb{R}$.

<u>Proposition 47</u> : L'application $\begin{cases} L^1_{loc}(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \\ f \mapsto (\varphi\mapsto\int_\mathbb{R} f(x)\varphi(x)\,dx)\end{cases}$ est bien définie et injective.

<u>Définition 48</u> : Soit $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. La dérivée faible de T est la distribution définie par : $\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}),\ T'(\varphi)=T(-\varphi')$

<u>Proposition 49</u> : Si $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, la dérivée faible de f est l'image de f' par l'injection $L^1_{loc}\hookrightarrow \mathcal{D}'$.

<u>Application 50</u> : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. Il existe $g\in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que, pour tous $x,y\in\mathbb{R}$, $f(y)-f(x)=\int_x^y g(t)\,dt$. DEVELOPPEMENT N°2

<u>Définition 51</u> : On définit $H^1(]0,1[)=\{f\in L^2([0,1]),\ f'\in L^2([0,1])\}$ (Sobolev).

<u>Théorème 52</u> : . $H^1(]0,1[)$ est un espace de Hilbert muni de $(f,g)\mapsto\int_0^1(fg+f'g')\,dx$.
. $H^1(]0,1[)\subset\mathcal{C}^0(]0,1[)\subset\mathcal{C}^{0,\alpha}([0,1])$, avec $\alpha\in]0,\frac{1}{2}]$.

<u>Application 53</u> : $H^1(]0,1[)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre pour le produit de fonctions.

III) Familles remarquables de fonctions intégrables

1) Familles sommables

<u>Définition 54</u> : Soit I un ensemble et $(a_i)_{i\in I}\in\mathbb{R}^I$. $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si la quantité $\sup_{J\subset I,\ J \text{ fini}}\{\sum_{j\in J}|a_j|\}$ est finie.

<u>Proposition 55</u> : $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si, et seulement si $(a_i)_{i\in I}\in L^1_m(I)$.

<u>Proposition 56</u> : Si $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $\{i\in I,\ a_i\neq0\}$ est dénombrable et la suite numérique $(\sum_{k=1}^n a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

<u>Contre-exemple 57</u> : La réciproque est fausse : $\left(\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^k}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge mais $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable.

<u>Proposition 58</u> : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^1_m(\mathbb{N})\Longrightarrow u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

2) Familles de polynômes orthogonaux

<u>Définition 59</u> : Pour tout $n\geq0$, il existe un unique $P_n\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, $P_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$ (n-ième polynôme de Tchebychev).

<u>Proposition 60</u> : - $\langle P,Q\rangle:=\int_{-1}^1\frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, pour lequel $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale.

<u>Proposition 61</u> : Les polynômes P_n vérifient $T_0=1$, $T_1=X$, $T_{n+2}=2XT_{n+1}-T_n$

<u>Théorème 62</u> : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\rho:I\to]0,+\infty[$ mesurable. S'il existe a tel que $\int_I e^{a|x|}\rho(x)\,dx<+\infty$, alors la famille de polynômes orthogonaux associée à ρ forme une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $L^2(I,\rho)$.

<u>Application 63</u> : Soit $\rho:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})\end{cases}$. On note $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes orthogonaux associés à ρ, appelés polynômes de Hermite.

<u>Proposition 64</u> : - $H_0=1$, $H_1=X$ et, pour tout $n\geq0$, $H_{n+2}=xH_{n+1}-(n+1)H_n$
- les polynômes H_n vérifient l'équation différentielle $H_n''(x)-xH_n'(x)+nH_n(x)=0$

3) Familles de variables aléatoires

<u>Définitions 65</u> : Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X:\Omega\to\mathbb{K}$. Si X est mesurable, on dit que X est une variable aléatoire.
- Si X est positive ou intégrable, on définit son espérance par $\mathbb{E}(X)=\int_\Omega X\,d\mathbb{P}$.
- On définit la loi de X comme $\mathbb{P}_X$ la mesure image de $\mathbb{P}$ par X.

<u>Proposition 66 (Théorème de transfert)</u> : Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\mathbb{P}_X$, et $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ mesurable. Alors, $\varphi\circ X$ est intégrable par rapport à $\mathbb{P}$ si, et seulement si φ est intégrable par rapport à $\mathbb{P}_X$, et $\int_\Omega\varphi(X(\omega))\,d\mathbb{P}=\int_\Omega\varphi(x)\,d\mathbb{P}_X$

<u>Application 67</u> : <u>Calcul de moments</u> :
- Si $X\sim\mathcal{P}(\lambda)$, alors $\mathbb{P}_X=\sum_{n\geq0}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\delta_n$ et $\mathbb{E}(X^k)=\sum_{n\geq0}n^k\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$ $(\forall k\in\mathbb{N})$

En particulier, $\mathbb{E}(X^2)=\lambda^2-\lambda$
- Si $X\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, alors $\mathrm{Var}(X)=\sigma^2$ et $\mathbb{P}_X=\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\lambda$

<u>Définition 68</u> : Soit X une variable aléatoire réelle. On définit sa fonction de répartition par $F_X:\begin{cases}\mathbb{R}\to[0,1]\\ x\mapsto\mathbb{P}_X(X\leq x)\end{cases}$.

<u>Proposition 69</u> : La fonction de répartition caractérise la loi, i.e. si X et Y sont deux variables aléatoires réelles telles que $F_X=F_Y$, $\mathbb{P}$-presque partout, alors $\mathbb{P}_X=\mathbb{P}_Y$.

<u>Application 70</u> : Soit $\mu\in\mathbb{R}_+^*$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre μ, i.e. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}_{X_n}=\mu e^{-\mu x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}\lambda$.
Si, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $M_n:=\max_{k\in[\![1,n]\!]}X_k$, alors $\frac{M_n}{\ln(n)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{\mu}$ ($\mathbb{P}$-presque partout).
De plus, pour toute fonction continue bornée $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:
$\mathbb{E}(h(\lambda M_n-\ln(n)))\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathbb{E}(h(Y))$, où Y est une variable aléatoire réelle caractérisée par sa fonction de répartition : $\forall t\geq0,\ F_Y(t)=\exp(-e^{-t})$.