Leçon 235 Suites et séries de fonctions intégrables : exemples et applications

Remarque : La construction de l'intégrale (Riemann ou Lebesgue) repose sur les suites de fonctions.

Contexte : $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré.

I. Du point de vue de la théorie de la mesure.

I.1. Théorèmes fondamentaux.

[BP III.7.2]

Thm 1 : Beppo Levi / convergence monotone.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions $(\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ mesurables et positives
alors : $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ est mesurable positive
et $\int_\Omega \lim_n f_n \, d\mu = \lim_n \int_\Omega f_n \, d\mu$

[BP III.8.1]

Lemme 1 : Fatou
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables et positives. Alors :
$$0 \leq \underline{\lim} \int f_n \, d\mu \leq \int \underline{\lim}_n f_n \, d\mu$$

Def 1 : $f\ (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est intégrable si $\int_\Omega |f| \, d\mu < +\infty$. Alors : $\forall p \geq 1$,
$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = \{ f\ (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \ / \ \int |f|^p d\mu < +\infty \}$$
$\forall f \in \mathcal{L}^p$, $\|f\|_p := \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$

[BP ex 9.8 p 184]

Application : $(f_n) \subset \mathcal{L}^p$ / $f_n \to f$ μ-pp
si $f \in \mathcal{L}^p$ alors : $(\|f_n - f\|_p \to 0 \iff \|f_n\|_p \to \|f\|_p)$

[BP III.8.1]

Thm 2 : Convergence dominée.
Soit $(f_n) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, telle que :
- . μpp $f_n(x)$ converge vers $f(x)$, où f est mesurable.
- .. il existe $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ / $\forall n \geq 1$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ μpp

Alors : . $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$
.. $\lim_n \int_\Omega |f_n - f| \, d\mu = 0$ et donc : $\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu$

[BP III.8.1]

exple 1 :
$f_n(x) = \min\left(\frac{e^{-nx^2}}{\sqrt{x}}, n\right)$, $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \geq 1$

contre-exple 1 : $f \geq 0$, continue, nulle hors de $[0,1]$ d'intégrale non nulle : $f_n(x) = \frac{f(x+n)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$

[BP III 8]

Thm 3 : convergence dominée pour les séries.
Soit $(u_n)_n$ des fonctions Ω-mesurables telles que : $\sum_{n\geq 0} \int |u_n| \, d\mu < +\infty$. Alors : u_n, $\sum |u_n|$ et $\sum u_n$ sont intégrables et $\int \sum_n u_n \, d\mu = \sum_n \int u_n \, d\mu$

Applications : théorèmes de continuité et dérivabilité sous le signe intégral.

I.2. Espaces L^p.

Def 2 : Si $f, g \in \mathcal{L}^p$, $f \mathcal{R} g \iff f = g$ μ-pp
et $L^p = \mathcal{L}^p / \mathcal{R}$

$(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé.

[Bre IV.8]

Thm 4 : Fisher-Riesz
$\forall p \in [1;+\infty]$, L^p est un Banach.

[Bre IV.9]

Thm 5 : Soit $(f_n) \subset L^p$ et $f \in L^p$ tels que : $|f_n - f|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Alors : il existe une extraction $(f_{n_k})_k$ telle que :
- $f_{n_k}(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x)$ μ-pp
- $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, $\forall k$ et pp (et $h \in L^p$)

[Bre IV 25]

Thm 6 : Compacts de L^p : Riesz Fréchet Kolmogorov
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $\omega \subset\subset \Omega$, et $\mathcal{F}$ sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.
Si : . $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tel que
$|f(\cdot + h) - f(\cdot)|_{L^p} < \varepsilon$ $\forall h \in \mathbb{R}^N$, $|h| < \delta$, $\forall f \in \mathcal{F}$
Alors : $\mathcal{F}_{|\omega}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$

[Will 14.7]

Thm 7 : Brezis Lieb :
Soient $1 \leq p < \infty$ et $(u_n) \subset L^p$ tels que :
$\sup_n |u_n|_p < \infty$ et $u_n(x) \to u(x)$ pp
Alors : $u \in L^p$ et $\lim_{n} \left(|u_n|_p^p - |u_n - u|_p^p\right) = |u|_p^p$

[Bre IV 23]

Thm 8 : densité dans L^p.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. Alors :
$\forall p \in [1;\infty[$, $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$

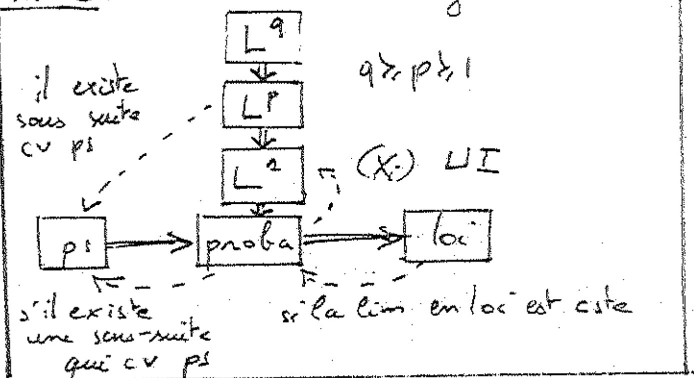
II. Théorèmes limites en probabilités.

II.1. Types de convergences.

Def 3 : Soient $(X_n)_n$ et X des variables aléatoires
$X_n \xrightarrow{ps} X$ ssi $\mathbb{P}(\omega \in \Omega / X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(\omega)) = 1$
$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ ssi $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
$X_n \xrightarrow{L^p} X$ ssi $|X_n - X|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
$(X_i)_{i \in I}$ uniformément intégrable ssi : [UI]
$$\lim_{a\to\infty} \sup_{i \in I} \int_{|X_i| > a} |X_i| \, d\mathbb{P} = 0$$

[OUV 10]

Thm 9 : lien entre les convergences :



[OUV 10]

Contre-exemples : on donne la loi de X_n, les (X_n) étant indépendantes.
$\frac{1}{n}\delta_0 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\delta_1$ $\mathbb{P}$-cv mais pas ps.
$\frac{1}{n}\delta_{n^2} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\delta_0$ $\mathbb{P}$-cv mais pas dans L^1.

II.2. Loi des grands nombres.

À la base de l'approche fréquentiste de la notion de probabilité.

[OUV 10.17/10.20]

Thm 10 : LGN faible
Soit (X_n) 2 à 2 indépendantes de même loi, admettant une moyenne. Alors : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} E[X_1]$
LGN forte : (X_n) indépendantes admettant des moments d'ordre 2 et telles que : $E[X_n] \to m$.
Alors : $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow[\text{et } L^2]{P.S} m$

[OUV 10.2]

Contre-exemple : $\frac{1}{2n\ln(n)}(\delta_n + \delta_{-n}) + \left(1 - \frac{1}{2n\ln n}\right)\delta_0$

Appli :
- méthodes de Monte Carlo
- approximation uniforme d'une fonction continue par les polynômes de Bernstein
- en Stat : Glivenko Cantelli et test de Kolmogorov-Smirnov.

II.3. Théorème Central-limite

[OUV 14.22]

Th 11 : (X_n) des v.a iid admettant un moment d'ordre 2. Alors : $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(X_j - EX_j) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, C_X)$
C_X matrice de covariance.

III. Un exemple de construction.

III.1. **Def 4** $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$. $X : \Omega \times \mathcal{T} \to E$ est un processus aléatoire ssi : $\forall t \in \mathcal{T}$, $X(\cdot, t)$ est une v.a.

Def 5 : $(X(t))_{t \in \mathcal{T}}$ est une fonction gaussienne ssi $\forall n \geq 1$, $\forall t_1 \dots t_n \in \mathcal{T}$, $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ est gaussien.

Exemple : - les martingales : (X_i) dans $(\Omega, (\mathcal{A}_i)_i, P)$ telles que X_i est $\mathcal{A}_i$-mesurable, intégrable et $E^{\mathcal{A}_i} X_j = X_i$, $i \leq j$
- la suite des sommes partielles : $\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)_n$

Thm 12 : Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, soit (γ_n) suite de mesures gaussiennes $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n)$. Si (m_n) et (σ_n) convergent vers m et $\sigma > 0$, (γ_n) converge étroitement vers $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. (Si $\sigma = 0$, vers δ_m). Si (m_n) bornée et $\sigma_n \to +\infty$, (γ_n) converge faiblement vers 0.

[OUV ex 14.4 p 330]

Def Thm 13. Espaces gaussiens.
Soit X une fonction gaussienne. L'espace gaussien associé est : $H^X = \overline{\mathrm{Vect}(X(t) - EX(t), t \in \mathcal{T})}^{L^2}$
Si $t \to X(t)$; $\mathbb{R} \to L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est continue, H^X est séparable.

On a donc $(\xi_n)_n$ une suite de $\mathcal{N}(0,1)$ iid BON de H^X et :
$$\forall t \in \mathcal{T}, \omega \in \Omega, \ X(t, \omega) = EX(t) + \sum c_n(t)\xi_n(\omega)$$
$$c_n(t) = E[X(t)\xi_n]$$

Base de Haar de $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}, dt)$ Def 15

$\Phi = \mathbb{1}_{]0;\frac{1}{2}]} - \mathbb{1}_{]\frac{1}{2};1)}$ et $\Phi_{k,m}(t) = 2^{\frac{m}{2}}\Phi(2^m t - k)$
$\varphi_k(t) = \mathbb{1}_{]k, k+1]}(t)$
$\tilde{\Phi}_{k,m}(s) = \langle \mathbb{1}_{[0;s]}, \Phi_{k,m} \rangle$ fonctions tente de Schauder

On pose : $B(s) = \sum_k \tilde{\varphi}_k(s)\eta_k + \sum_{k,m} \tilde{\Phi}_{k,m}(s)\xi_{k,m}$
$:= \beta(s) + \sum_m B^{(m)}(s)$

Thm 14 : Avec probabilité 1, la série $\sum B^{(m)}$ converge uniformément sur $[0;T]$ $\forall T < \infty$.

Appli : $(B(s))_{s \geq 0}$ est une fonction aléatoire réelle pS continue à accroissements indépendants gaussiens.

(C'est un mouvement brownien)

Références :

[Bre] Brezis, Analyse fonctionnelle.

[BP] Briane-Pagès, Théorie de l'intégration.

[OUV] Ouvrard, Probabilités 2.

Pour la partie III, le chp I et II de Calcul stochastique et modèles de diffusions, Comets et Meyre.

[WIL] Principes d'analyse fonction. Willem.

Développements possibles

Prolongement de la fonction Γ dans le Zuily Queffélec.

Thm de Fejér.

Thm sur la convergence de la convolution avec identité approchée.

Rq : . on peut approfondir les martingales (Ouvrard) avec des thms de cv poussés.

. séries de Fourier, convolution, noyau de Dirichlet et de Fejér.

$$\underbrace{D_n = \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\cdot}}_{\text{pas positif}} \quad \text{et} \quad F_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k$$

noyau positif et approximation de l'unité.

$S_n(f) = f * D_n$ série de Fourier

$\|f*F_n - f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

outil pour résoudre l'équation de la chaleur. Tout comme le mouvement brownien : avec la formule de Feynman Kac...