235 Suites et séries de fonctions intégrables : Exemples et applications

I Intégrale de Lebesgue : principaux théorèmes de convergence.

1) Intégrale de Riemann : limitations. [BRI-PAG]

Thm$_1$: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions Riemann-intégrables sur 1 intervalle compact $[a,b]$, telles que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ uniformément sur $[a,b]$; alors f est Riemann intégrable et $\int_a^b f = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n$.

Rem$_2$: L'hypothèse de convergence uniforme est essentielle.

Ex$_3$: $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une numérotation des rationnels de $[0,1]$; $f_n(x) = \mathbb{1}_{\{r_0,\dots,r_n\}}(x)$ définit une fonction Riemann-intégrable sur $[0,1]$, qui converge simplement vers $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$, qui n'est pas Riemann intégrable.

Pour pallier à ce genre de limitation, on introduit l'intégrale de Lebesgue.

Def$_4$: (Intégrale de Lebesgue) soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré, et $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A})$

$$\int_X f d\mu = \sup_{\substack{\varphi\leq f \\ \varphi \text{ étagée}}} \int_X \varphi d\mu .$$

Si $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, on pose $\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$

Def$_5$: (Intégrabilité au sens de Lebesgue) $(X,\mathcal{A},\mu)$ espace mesuré ; $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est intégrable si $\int_X |f| d\mu < +\infty$.

* On note $\mathcal{L}^1(\mu)$ l'ensemble des fonctions intégrables sur X
* On note $\mathcal{L}^p(\mu)$ l'ensemble des fonctions telles que f^p est intégrable sur X.

2) Théorèmes de convergence.

Thm$_6$: (Convergence monotone ou Beppo-Lévi) soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ espace mesuré. soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de $\mathcal{M}_+(\mathcal{A})$, croissante (ie telle que $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$) $f = \lim_n f_n$;

Alors $\int_X f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu$.

Application$_7$: Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de $\mathcal{M}_+(\mathcal{A})$, et $S_n = \sum_{i=0}^n f_i$

alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) d\mu$

Ex$_8$: Étude de la convergence de la suite $I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} dx$

Ex$_9$: Le résultat ne tient plus si on suppose $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante : $f_n = \mathbb{1}_{[n,+\infty[}$ [BRI PAG]

Thm$_{10}$: (Lemme de Fatou) Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ espace mesuré ; $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions intégrables et positives ; $f = \liminf_{n\to+\infty} f_n$

Alors $0 \leq \int_X f d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu$

Application$_{11}$: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{L}^1(\mu))^{\mathbb{N}}$, $\begin{cases} f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f \text{ simplement} \\ \sup_n \int_X |f_n| d\mu < +\infty \end{cases}$; alors $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$

Application$_{12}$: $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, croissante, continue en 0 et 1, dérivable μ-pp sur $[0,1]$ alors $\int_0^1 f'(x) dx \leq f(1) - f(0)$

Thm$_{13}$: (Théorème de convergence dominée de Lebesgue)

$(X,\mathcal{A},\mu)$ espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{L}^1(\mu))^{\mathbb{N}}$, $f : X \to \mathbb{R}$ telles que

i) $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ pour μ-presque tout $x\in X$

ii) $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour μ presque tout $x \in X$

Alors $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$ (et même $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$)

Application$_{14}$:
- Théorème de dérivation sous le signe intégral
- Théorème de continuité sous le signe intégral.

Application$_{15}$: (Interversion série-intégrale) Si les $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mesurables, et si $\sum_{n\geq 0} \int_X |\varphi_n| d\mu < +\infty$, alors φ_n, $\sum_{n\geq0} |\varphi_n|$ et $\sum_{n\geq 0} \varphi_n$ sont intégrables et $\sum_{n\geq0} \int_X f_n d\mu = \int_X \left(\sum_{n\geq0} \varphi_n\right) d\mu$

Rem$_{16}$: Pour la Riemann-intégrabilité, la convergence uniforme était essentielle, tandis qu'on peut avoir domination sans convergence uniforme.

Ex$_{17}$: $f_n = \min\left(\frac{e^{-nx^2}}{\sqrt{x}}, n\right)$ est dominée sans converger uniformément (et converge pp vers la fonction nulle)

Ex$_{18}$: On peut avoir convergence de la suite des intégrales sans pour autant avoir de domination : si f est continue, positive, intégrable, de support inclus dans $[0,1]$, on considère $f_n(x) = \frac{f(nx)}{n}$; $\int_X f_n d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais $\sup_n |f_n|$ n'est pas intégrable.

[BRI PAG]

II Espaces L^p, $1 \leq p < +\infty$

1) Définition et structure d'espace de Banach

Ex$_{19}$: $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} = \lim\limits_{n\to\infty}\uparrow f_n = \lim\limits_{n\to\infty}\uparrow \mathbb{1}_{\{q_0,\dots,q_n\}}$; or, $\int_X f_n d\mu = 0$ donc par le théorème de Beppo-Lévi, $\int_X f d\mu = 0$ (et $\forall p \in [1,+\infty[$, $\int_X |f|^p d\mu = 0$) et pourtant $f \neq 0$: donc $\|.\|_p = (\int_X |.|^p d\mu)^{1/p}$ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^p(\mu)$.
Pour y remédier, on introduit

Def$_{20}$: * $\underset{\mu}{\sim}$ définie par : $f \underset{\mu}{\sim} g \Leftrightarrow f = g$ μ-presque partout

* $L^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu)/_{\underset{\mu}{\sim}}$

Lemme$_{21}$ (Inégalité de Hölder) $1 \leq p < +\infty$ et q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
Si $f \in \mathcal{L}^p$, $g \in \mathcal{L}^q$, alors $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\int_X |fg| d\mu \leq (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p} (\int_X |g|^q d\mu)^{1/q}$

Application$_{22}$: Si $(X,\mathcal{A},\mu)$ est tel que $\mu(X) = 1$, alors $\begin{cases} r \leq s \\ f \in \mathcal{L}^s \end{cases} \Rightarrow f \in \mathcal{L}^r$

Thm$_{23}$: $(L^p(\mu), \|.\|_p)$ est un espace vectoriel normé pour $1 \leq p < +\infty$.

Thm$_{24}$: Si $1 \leq p < +\infty$, $(L^p(\mu), \|.\|_p)$ est séparable.

Thm$_{25}$: (Riesz-Fischer) (i) $(L^p, \|.\|_p)$ est un espace de Banach
(ii) De toute suite convergente dans L^p, on peut extraire une sous-suite qui converge presque partout.

Application$_{26}$: $(L^2(\mu), <.>)$ où $<f,g> = \int_X f\bar{g} d\mu$, est un espace de Hilbert.

2) Convolution, suites régularisantes.

(Dans cette partie, $X = \Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$ et μ est la mesure de Lebesgue sur $\Omega \subset \mathbb{R}^d$) [BRE]

Def$_{27}$: $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) dy$ si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$

Prop$_{28}$: Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, alors $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, et
$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f*g(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d} |g|^p\right)^{1/p}$$

Prop$_{29}$: Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, alors $f*g$ est uniformément continue et bornée

Prop$_{30}$: $\forall k \in \mathbb{N}$, si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^k_c(\mathbb{R}^d)$, alors $f * \varphi \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$
et $\forall \alpha$ tel que $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha(f*\varphi) = f * D^\alpha \varphi$

Def$_{31}$: (Suite régularisante) $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (L^1(\mathbb{R}^d))^{\mathbb{N}}$ est dite régularisante si :
i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\rho_n \geq 0$
ii) $\forall n \geq 0$, $\rho_n \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$
iii) $\forall n \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(x) dx = 1$
iv) $\mathrm{supp}(\rho_n) \subset B(0, \frac{1}{n})$

Thm$_{32}$: $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite régularisante, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$; alors $f * \rho_n \in L^p(\mathbb{R}^d)$ $\forall n \geq 0$ et $f * \rho_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|.\|_p} f$

Application$_{33}$: (Théorème de densité dans les L^p) $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $(L^p(\mathbb{R}^d), \|.\|_p)$

Application$_{34}$: (Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov) 1er développement
$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert, $\omega \subset \Omega$ relativement compact, $\mathcal{F} \subset L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, telle que $\mathcal{F}$ soit bornée.
Si on a : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, 0 < \delta < d(\omega, \Omega)$ tel que $\|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon$ $\begin{cases} \forall h \in \mathbb{R}^d, |h| < \delta \\ \forall f \in \mathcal{F} \end{cases}$
alors $\mathcal{F}_{|\omega}$ est relativement compacte dans $L^p(\omega)$

3) Application à l'analyse de Fourier

[ZUI QUE]

Def$_{35}$: Si $f \in L^1$ (f 2π-périodique), $n \in \mathbb{Z}$, on pose :
$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$
$e_n(t) = t \mapsto e^{int} \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$
$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n$
$\sigma_N(f) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} S_n(f)$.
$\gamma(f) = (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$.

Noyau de Dirichlet : $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$

Noyau de Féjer : $K_N = \frac{D_0 + \dots + D_{N-1}}{N}$

[ZUI QUE]

Def$_{36}$: (Transformée de Fourier) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on pose
$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-itx} dx$$

Prop$_{37}$: (Lemme de Riemann-Lebesgue) $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$ et $f \in L^1([a,b])$

Alors $\int_{[a,b]} f(t) e^{int} dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Prop$_{38}$: $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_N(f) = f * D_N$
$\sigma_N(f) = f * K_N$

Thm$_{39}$: (Féjer) * Si f est continue, alors $\|\sigma_N(f) - f\|_\infty \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$
et $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$

* Si $f \in L^p$ $(1 \leq p < +\infty)$, alors $\|\sigma_N(f) - f\|_{L^p} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$
et $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$

Application$_{40}$: * $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est base hilbertienne de $L^2([0,2\pi])$
* en particulier, $\begin{cases} \|S_n(f) - f\|_2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \\ \|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \end{cases}$ si $f \in L^2([0,2\pi])$
* γ est injective sur $L^1([0,2\pi])$
* Si $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$ converge normalement, en particulier si $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)| < +\infty$, alors f est développable en série de Fourier.
* $\gamma : \begin{cases} L^1 \to l_0(\mathbb{Z}) \\ f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \end{cases}$ est injective.

développement | **Thm$_{41}$** : (Benedicks) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, telle que $\begin{cases} A = \mathrm{supp}(f) \\ B = \mathrm{supp}(\hat{f}) \end{cases}$ soient de mesure de Lebesgue finies, Alors $f = 0$ presque partout

Rem$_{42}$: Le théorème n'est plus vrai dans le cadre des distributions

III Utilisation en probabilités
($v.a$ = variables aléatoires, iid = indépendantes, identiquement distribuées) [OUV]

1) Les différents modes de convergence

Def$_{43}$: $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé ; $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires à valeurs réelles ou vectorielles

* $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire X si
$$\mathbb{P}(\{X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} X\}) = 1$$
* $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X si
$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$
* $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers X si
$$\forall f \in C_b(\Omega), E(f(X_n)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} E(f(X))$$

Rem$_{44}$: on a les implications suivantes :

Convergence p.s $\Rightarrow$ Convergence en probabilité $\Rightarrow$ Convergence en loi
$\Uparrow$
Convergence L^p

Def$_{45}$: (Uniforme intégrabilité) $(X_i)_{i \in I}$ est uniformément intégrable si
$$\lim_{a \to +\infty} \sup_{i \in I} \int_{\{|X_i| > a\}} |X_i| d\mathbb{P} = 0$$

Thm$_{46}$: on a équivalence de : (i) $(X_n)_n$ converge dans L^p et (ii) $(|X_n|^p)_n$ est uniformément intégrable et il existe $X \in L^p$ telle que $X_n \to X$ en probabilités

2) Théorèmes limites en probabilités

Prop$_{47}$ (Inégalité de Tchebychev) Si X variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, alors $\mathbb{P}(|X - E(X)| > a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}$ pour tout $a > 0$

Thm$_{48}$: (Loi faible des grands nombres) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (L^2)^{\mathbb{N}}$ variables aléatoires iid, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$
alors $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{n \to +\infty} E(X)$ en probabilité, $\Leftarrow \forall a > 0$, $\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - E(X)| > a) \leq \frac{Var(X)}{n a^2}$

Application$_{49}$: polynômes de Bernstein

Thm$_{49}$: (Loi forte des grands nombres) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ v.a iid ; on a $E(|X_1|) < +\infty \Leftrightarrow \left(\frac{S_n}{n}\right)$ converge p.s

Alors $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} E(X)$

Thm$_{50}$: (Théorème central limite) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^2$, iid ; $\sigma^2 = Var(X_1)$; on a $\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - E(X)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{loi} N(0, \sigma^2)$

[BRI-PAG] : Briane-Pagès, Théorie de l'intégration.

[BRE] : H. Brézis, Analyse Fonctionnelle.

[ZUI-QUE] : Zuily-Quéffelec, Analyse pour l'agrégation

[OUV] : J-Y Ouvrard, Probabilités 2