235

Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

DVP

prérequis : modes de convergence des suites et séries de fonctions.

I - Résultats généraux sur les suites et séries de fonction

1) ~~Continuité~~ limite, intégrabilité et CVU

[DES] p302

thm 1 : Soit J un segment de $\mathbb{R}$ et $(f_n) \in C(J, \mathbb{R})$ qui converge uniformément vers f. Alors
$$\lim_n \int_J f_n = \int_J f$$

p319

Cor 2 : Soit J un segment de $\mathbb{R}$ et $\sum f_n$ qui converge uniformément sur J. Alors
$$\int_J \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_J f_n$$

p320

ex 3 : Si $(c_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est telle que $\sum c_n$ converge absolument alors la série $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{inx}$ converge normalement et $\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = 2\pi c_n$

p319

thm 4 : (interversion lim et $\sum$) Soit $f_n : A \to F$ complet. Soient $a \in \bar{A} \subset \mathbb{R}$ et $\sum f_n$ convergeant uniformément sur A et telle que pour tout n, f_n admet une limite finie l_n en a. Alors $\sum l_n$ converge dans F, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ admet une limite en a et
$$\lim_a \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_a f_n$$

ex 5 : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ n'est pas uniformément convergente sur $]1, +\infty[$.

théorème 6 : (Abel) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1 telle que $\sum a_n$ converge. Alors
$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{où } \theta_0 \in [0, \tfrac{\pi}{2}[\text{ et}$$
$$\Delta_{\theta_0} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta} \}$$

[GOU] p253

ex 7 : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \arctan x = \frac{\pi}{4}$

thm 8 : (Taubérien faible) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 de somme f. On suppose $\exists S \in \mathbb{C}$, $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = S$ et $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.
Alors $\sum a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$

2) Dérivabilité

[DES] p382

thm 9 (dérivation terme à terme)
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de classe C^k telle que $\sum f_n^{(i)}$, $i \in [\![0, k-1]\!]$ converge simplement sur un intervalle I. Si $\sum f_n^{(k)}$ converge localement uniformément sur I alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^k et
$$\forall i \in [\![0, k]\!] \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)}$$

ex 10 : La fonction ζ de Riemann réelle définie sur $I =]1, +\infty[$ par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est de classe C^∞.

II - Limite et intégration

1) interversion lim et $\int$

[MAR] p239

thm 11 (convergence monotone) Soit X espace mesuré. Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables définies sur X

à valeurs dans $[0,+\infty]$. Soit $f = \sup_n f_n = \lim_n f_n$. f est mesurable et $\int_X f = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n$.

p241 <u>contre-ex 12</u> : ($f_n = n \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$) converge simplement vers $f : x \mapsto 0$ si $x \neq 0$ et $+\infty$ si $x = 0$ et $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$ $\forall n$ mais $\int_{\mathbb{R}} f = 0$.

242 <u>thm 13</u> (lemme de Fatou)
Soit $(f_n : X \to [0,+\infty])$ une suite de fonctions mesurables

$$\int_X \liminf f_n \leq \liminf \int_X f_n$$

p249 <u>thm 14</u> (convergence dominée) $(X,\mathcal{M},\mu)$ espace mesuré $(f_n : X \to \mathbb{C}) \in L^1(X,\mu)$ qui converge simplement vers f sur X. Si il existe $g \in L^1(X,\mu)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ sur X, alors $f \in L^1(X,\mu)$ et $\int_X f = \lim_n \int_X f_n$.

<u>contre-ex 15</u> : ($f_n = n \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$) n'est pas dominée par une fonction $g \in L^1(\mathbb{R},\lambda)$

[DES] p446 <u>ex 16</u> : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

2) <u>interversion de l'ordre de sommation</u>

[MAR] p258 <u>thm 17</u> (Fubini-Tonelli) $(X,\mathcal{M},\mu)$ et $(Y,\mathcal{N},\nu)$ deux espaces mesurés σ-finis.

1. (Tonelli) soit $f : X\times Y \to [0,+\infty]$ mesurable. On a

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\nu(dy)\right)\mu(dx) = \int_{X\times Y} f(x,y)\, \mu\otimes\nu(dx,dy) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\mu(dx)\right)\nu(dy)$$

2. (Fubini) $f : X\times Y \to \mathbb{C}$ $(\mu\otimes\nu)$-intégrable. On a la même égalité que dans 1.

<u>contre-ex 18</u> : $f : A = [-1,1]^2 \to \mathbb{R}$, $\overset{z}{\overbrace{(x,y)}} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } z = (0,0) \\ \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{sinon} \end{cases}$ [MAU] p283
vérifie la conclusion du thm 17 mais n'est pas intégrable au sens de Riemann.

<u>ex 19</u> (un calcul de volume) Soit $\overline{B(0,r)} \subset \mathbb{R}^3$. [MAR] p268

$$\lambda^{\otimes 3}(\overline{B(0,r)}) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

<u>cor 20</u> : (intégration terme à terme) Soit (f_n) suite de fonctions mesurables de $(X,\mathcal{M},\mu)$ σ-fini, dans $\mathbb{C}$. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_X |f_n|$ ou $\int_X \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n|$ sont finies on a p282

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \, d\mu$$

<u>appl 21</u> : (Formule sommatoire de Poisson) [GOU] p272
$f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $f(x) = O_{+\infty}(1/x^2)$ et $f'(x) = O_{+\infty}(1/x^2)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, e^{2i\pi n x}$$

DVP

<u>cor 22</u> : Soit (u_{pq}) une suite double à valeur dans $\mathbb{C}$. Si pour tout $q \in \mathbb{N}$ (resp $p \in \mathbb{N}$) $\sum_p u_{pq}$ (resp $\sum_q u_{pq}$) converge absolument et $\sum_q \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{pq}|\right)$ (resp $\sum_p \left(\sum_{q=0}^{+\infty} |u_{pq}|\right)$) converge, alors $\sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{pq}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{pq}\right)$.

<u>appl 23</u> (Nombre de Bell) DVP
Soit B_n le nombre de partitions de $[\![1,n]\!]$.
On a : $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$

III – Applications

1) Étude des intégrales à paramètre

[MAR] **thm 24** : $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espace mesuré ; $f : \mathbb{C} \times X \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$ vérifiant :
1. $\forall x \in \mathbb{C}$, f_x est $\mathcal{M}$-mesurable.
2. $\forall y \in X$, $f_y : x \mapsto f(x,y)$ est continue en a.
3. $\exists g \in L^1(\mu)$ telle que $\forall x \in \mathbb{C}$, $\forall y \in X$, $|f(x,y)| \leq g(y)$

Alors $F : x \mapsto \int_X f(x,y)\,\mu(dy)$ est continue en a.

thm 25 : $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espace mesuré ; I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant :
1. $\forall x \in I$, $f_x \in L^1(\mu)$.
2. $\forall y \in X$, f_y est dérivable dans I.
3. $\exists g \in L^1(\mu)$ telle que $\forall x \in I, \forall y \in X$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq g(y)$

alors F est dérivable et $\forall x \in I$, $F'(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mu(dy)$

ex 26 (transformée de Laplace) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
$F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^\infty e^{-tx} f(t)\,dt$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.

thm 27 : $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espace mesuré, D ouvert de $\mathbb{C}$.
$f : D \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant :
1. $\forall z \in D$, f_z est $\mathcal{M}$-mesurable.
2. $\forall y \in X$, f_y est holomorphe dans D.
3. $\exists g \in L^1(\mu)$, $\forall z \in D$, $\forall y \in X$, $|f(z,y)| \leq g(y)$

Alors F est holomorphe dans D avec $\forall z \in D$
$F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z,y)\,\mu(dy)$

DUPT ([ZQ] p312 **ex 28** : $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt \in C^\infty(]0,+\infty[, \mathbb{R})$.

Γ se prolonge de façon holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z > 0\}$

2) Produit de convolution [ZQ]

déf 29 : si f, g sont 2 fonctions sur $\mathbb{R}^n$, on définit formellement
$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y)\,dy$.

prop 30 : si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f*g$ est défini p.p et $f*g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

thm 31 : Soient $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ à support compact. Alors $f*g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ et
$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq k$, $(f*g)^{(\alpha)} = f^{(\alpha)} * g$.

(**appl 32** : théorème de Stone Weierstrass dans $\mathbb{R}^n$) (DUR !!)
Autre app si P est un polynôme et g L^1 à support compact alors $P*g$ est un poly. [ZQ]

3) Analyse de Fourier

déf 33 : soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On définit la transformée de Fourier de f par : $\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x)\,dx$, $t \in \mathbb{R}$.

prop 34 : $\hat{f}$ est continue et tend vers 0 à l'infini

thm 35 : si $f \in S(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$.

ex 36 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x^2}$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(t) = \sqrt{\pi}\, e^{-t^2/4}$.

thm 37 (inversion de Fourier).
Soit $f \in S(\mathbb{R})$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \hat{f}(t)\,dt.$$

) DUPT

Références :

[MAR] "Mathématiques analyse L3" Jean-Pierre Marco.

[GOU] Gourdon analyse.

[ZQ] Zuily Queffélec

[HAU] Hauchecorne " les contres-exemples en mathématiques".

Développements

DERENNES Pierre
ROBERT Samantha

24 novembre 2014

Théorème d'Abel Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1 telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur le disque unité. On fixe $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et on pose

$$\Delta_{\theta_0} = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| |z| < 1 \ \ et \ \ \exists \rho > 0, \ \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta} \right\}$$

(confer figure dans Gourdon). Alors on a :

$$lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Démonstration. Notons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $R_n = S - S_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour majorer $|f(z) - S|$, on va effectuer une transformation d'Abel en écrivant $a_n = R_{n-1} - R_n$ pour tout n. Soit $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left(\sum_{n=0}^{N} a_n z^n \right) - S_N = \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) = \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^{N} R_n (z^n - 1)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - z^n) - R_N (z^N - 1) = (z-1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N (z^N - 1),$$

et en faisant tendre N vers $+\infty$ on en déduit

$$f(z) - S = (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n \quad (*)$$

Fixons maintenant $\epsilon > 0$, puis $N \in \mathbb{N}$ tel que $|R_n| < \epsilon$ pour tout $n > N$. D'après $(*)$, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$,

$$|f(z) - S| \leq |z-1| \left| \sum_{n=0}^{N} R_n z^n \right| + \epsilon |z-1| \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |z|^n \right) \leq |z-1| \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n| \right) + \epsilon \frac{|z-1|}{1 - |z|} \quad (**)$$

Soit $z \in \Delta_{\theta_0}$, de sorte que $z = 1 - \rho e^{i\phi}$ avec $\rho > 0$ et $|\phi| \leq \theta_0$. On a $|z|^2 = 1 - 2\rho cos(\phi) + \rho^2$, et lorsque $\rho \leq cos(\theta_0)$ on a la majoration

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|}{1-|z|^2}(1 + |z|) = \frac{\rho}{2\rho cos(\phi) - \rho^2}(1 + |z|)$$

$$\leq \frac{2}{2cos(\phi) - \rho} \leq \frac{2}{2cos(\theta_0) - cos(\theta_0)} = \frac{2}{cos(\theta_0)}.$$

Choisissons maintenant $\alpha > 0$ tel que $\alpha \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n|\right) < \epsilon$. D'après tout ce qui précède on a :

$$\forall z \in \Delta_{\theta_0},\ |z-1| \leq min(\alpha, cos(\theta_0)), \quad |f(z) - S| \leq \epsilon + \epsilon \frac{2}{cos(\theta_0)}.$$

□

Remarque La réciproque de ce théorème est fausse. Par exemple, on a

$$lim_{\substack{z\to 1\\|z|<1}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = lim_{\substack{z\to 1\\|z|<1}} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$$

et pourtant $\sum (-1)^n$ diverge. Cependant, le théorème suivant donne une réciproque affaiblie si $a_n = o(\frac{1}{n})$.

Théorème Taubérien faible Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et f la somme de cette série entière sur le disque unité. On suppose que

$$\exists S \in \mathbb{C}, \quad lim_{\substack{x\to 1\\|x|<1}} f(x) = S.$$

Si $a_n = o(\frac{1}{n})$, alors $\sum a_n$ converge et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]0,1[,\ \ S_n - f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(1-x^k) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$$

et comme $(1-x^k) = (1-x)(1+x+...+x^{k-1}) \leq k(1-x)$ pour $0 < x < 1$, on en déduit

$$|S_n - f(x)| \leq (1-x)\sum_{k=1}^{n} k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k|a_k|}{n} x^k \leq (1-x)Mn + \frac{sup_{k>n} k|a_k|}{n(1-x)}$$

où M désigne un majorant de la suite $(k|a_k|)$ (elle est bien majorée car tend vers 0 par hypothèse). Fixons maintenant $\epsilon \in]0,1[$. Par ce qui précède on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|S_n - f(1-\frac{\epsilon}{n})\right| \leq M\epsilon + \frac{sup_{k>n} k|a_k|}{\epsilon}$$

donc si N_0 est choisi tel que $sup_{k>n} k|a_k| < \epsilon^2$ (on peut car $k|a_k| \to 0$), on en déduit

$$\forall n \geq N_0, \quad \left|S_n - f(1-\frac{\epsilon}{n})\right| \leq (M+1)\epsilon$$

Or $f(x) \underbrace{\longrightarrow}_{x\to 1^-}$ donc il existe $N_1 \geq N_0$ tel que $|f(1-\frac{\epsilon}{n}) - S| < \epsilon$ pour tout tout $n \geq N_1$.

Ainsi,

$$\forall n \geq N_1, \quad |S_n - S| \leq \left|S_n - f(1-\frac{\epsilon}{n})\right| + \left|f(1-\frac{\epsilon}{n}) - S\right| \leq (M+1)\epsilon + \epsilon = (M+2)\epsilon$$

$\square$

Théorème : (nombres de Bell) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{B}_n$ le nombre de partitions de l'ensemble $\{1, ..., n\}$ avec pour convention $\mathscr{B}_0 = 1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\boxed{\mathscr{B}_k = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}}$$

Démonstration. • **Commençons par déterminer une relation de récurrence entre les $\mathscr{B}_n$.**
Déjà, on peut intuiter un peu en calculant les premiers termes $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_3$:

-$\mathscr{B}_1 = 1$

-$\mathscr{B}_2 = 2 : \{1\} \cup \{2\}$ et $\{1, 2\}$.

-$\mathscr{B}_3 = 5 : \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$, $\{1, 2\} \cup \{3\}$, $\{1, 3\} \cup \{2\}$, $\{2, 3\} \cup \{1\}$ et $\{1, 2, 3\}$.

Pour $k \in \{1, ..., n\}$, considérons l'ensemble E_k des partitions de $\{1, ..., n+1\}$ pour lesquelles la partie de $\{1, ..., n+1\}$ contenant $\{n+1\}$ est de cardinal $k+1$. On a $card(E_k) = \binom{n}{k}\mathscr{B}_{n-k}$.
En effet, pour constituer la partie contenant $\{n+1\}$, il faut choisir k éléments dans $\{1, ..., n\}$ puis il faut réaliser une partition des $n-k$ éléments restants.
Comme E_0,...,E_n forment une partition de l'ensemble des partitions de $\{1, ..., n+1\}$, on obtient

$$\mathscr{B}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{=\binom{n}{n-k}} \mathscr{B}_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\mathscr{B}_k$$

• **On considère la série génératrice exponentielle de la suite** $(\mathscr{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathscr{B}_n}{n!} z^n$$

Etudions la rayon de convergence R de cette série. On montre aisément par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{B}_n \leq n!$ (à l'aide de la relation de récurrence ci-avant). Ainsi $R \geq 1$ (donc $R \neq 0$).
Calculons $f(z)$ pour $z \in]-R, R[$ en utilisant la relation de récurrente précédente.

Par le théorème de dérivation terme à terme d'une série entière on a $\forall z \in]-R, R[$,

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathscr{B}_{n+1}}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathscr{B}_k \right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathscr{B}_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right) z^n$$

On reconnait dans le dernier terme le produit de Cauchy de $\sum \frac{\mathscr{B}_n}{n!} z^n$ et $\sum \frac{z^n}{n!}$ qui sont toutes les deux de rayon de convergence $\geq R$. On a donc

$$\forall z \in]-R, R[, \quad f'(z) = f(z) e^z$$

Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall z \in]-R, R[, f(z) = Ce^{e^z}$. En tenant compte de la condition initiale $f(0) = \mathscr{B}_0 = 1$ on en déduit que $C = \frac{1}{e}$. Finalement on obtient

$$\forall z \in]-R, R[, \quad \boxed{f(z) = \frac{1}{e} e^{e^z} = e^{e^z - 1}}$$

- On a pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$e^{e^z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{nz}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nz)^k}{n!k!}$$

Considérons la suite double $(u_{n,k} = \frac{(nz)^k}{n!k!})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|nz|^k}{n!k!} = \frac{e^{|nz|}}{n!}$$

puis

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{|nz|}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^{|z|})^n}{n!} = e^{e^{|z|}}$$

La série double est donc sommable pour tout $z \in \mathbb{C}$. Ainsi, on peut intervertir l'ordre des sommations et en déduire que pour tout $z \in]-R, R[$,

$$\underbrace{f(z)}_{=\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathscr{B}_k}{k!} z^k} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k} \right) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} \right) \frac{z^k}{k!}$$

Ainsi, par unicité du développement en série entière on a

$$\boxed{\mathscr{B}_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}}$$

□

Référence : [Oraux X-ENS algèbre 1].