235

Théorèmes d'interversion de limites et d'intégrales

Cadre: $(E,\mathcal{B},\mu)$ espace mesuré, $f_n, f : E \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$p \in [1,+\infty[$

I- Suites de fonctions intégrables [G]

1) Quelques contres exemples

Contre ex 1: $(f_n)\in(\mathcal{L}^p)^{\mathbb{N}}$, $f_n \to f$ μ pp $\not\Rightarrow f\in\mathcal{L}^p$

$f_n = \mathbb{1}_{[-n,n]} \in L^p(\mathbb{R})$ et $f=\mathbb{1}_{\mathbb{R}}\notin L^p(\mathbb{R})$

Contre ex 2: $(f_n)\in(\mathcal{L}^p)^{\mathbb{N}}$, $f\in\mathcal{L}^p$, $f_n\to f$ μ.pp

$\not\Rightarrow f_n \xrightarrow{L^p} f$

$\not\Rightarrow \int|f_n|^p \to \int|f|^p$

$f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]} \in L^1(\mathbb{R})$, $f_n\to 0$ p.p $\|f_n\|_{L^1}=1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$

Contre ex 3: $f_n \xrightarrow{L^p} f \not\Rightarrow f_n\to f$ μ p.p

cf annexe 1.

2) Théorèmes pour les fonctions mesurables ≥ 0

Thm 4: Théorème de Beppo-Levi

Soit $f_n \in \overline{\mathcal{M}}_+ \nearrow f\in\overline{\mathcal{M}}_+$, alors $\int f_n \nearrow \int f$

Application 5: Si μ est σ-finie et $f\in\overline{\mathcal{M}}_+\cap\mathcal{L}^1$, alors $\nu: \mathcal{B}\to\overline{\mathbb{R}}_+$, $B\mapsto \int_B f\,d\mu$ est une mesure

- g est ν-intégrable $\iff gf$ est μ-intégrable
  dans ce cas: $\int g\,d\nu = \int fg\,d\mu$.

Thm 6: Lemme de Fatou

Soit $(f_n)\in(\overline{\mathcal{M}}_+)^{\mathbb{N}}$, alors $\int \underline{\lim}\, f_n \le \underline{\lim}\int f_n$

Cor 7: Soit $f\geq 0$. Alors $\int f = 0 \iff f=0$ p.p.

Cor 8: Soit $f_n\in\mathcal{L}^p \to f$ μ p.p, $f\in\mathcal{M}$.

Alors $\cdot \int|f_n|^p d\mu \not\to +\infty \Rightarrow f\in\mathcal{L}^p$

3) Le cas des fonctions à valeurs complexes

Thm 9: Soit $f_n \xrightarrow{L^p} f$, $f\in\mathcal{L}^p$.

Alors $\cdot \int|f_n|^p d\mu \to \int|f|^p d\mu$

$\cdot$ $p=1$ $\int f_n\, d\mu \to \int f\, d\mu$

Thm 10: Théorème de Riesz-Fischer

Soit (f_n) une suite de Cauchy de $(L^p, \|\cdot\|_p)$

Alors: $\cdot$ $\exists f\in L^p$ et (f_{n_k}) tq $f_{n_k}\to f$ μ.p.p.

$\cdot$ $f_n \xrightarrow{L^p} f$ i.e. $(L^p,\|\cdot\|_p)$ est complet.

Cor 11: Si $f_n\xrightarrow{L^p} f$ et $f_n\to g$ μ p.p.

Alors $\cdot$ $f=g$ μ.p.p

$\cdot$ $g\in L^p$

Thm 12 : Théorème de convergence dominée

Soit $(f_n) \in L^p$, $f_n \to f$ μ p.p, $f \in \mathcal{M}$.

Supposons que $\exists g \in L^p$ tq $\forall n$ $|f_n| \leq g$ μ p.p.

Alors :
- $f \in L^p$ et $f_n \xrightarrow{L^p} f$
- $p=1$ $\int f_n \longrightarrow \int f$

Ex 13 : $f_n = \frac{\sin^n(x)}{x^2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} \longrightarrow 0$ p.p et $\int f_n \longrightarrow 0$.

Cor 14 : Soit $(f_n) \in L^1$ tq $\sum_{n=0}^{N} f_n \longrightarrow f$ μ.p.p, $f \in \mathcal{M}$.

Supposons qu'$\exists$ $g \in L^1$ tq $\forall N \geq 1$ $\left|\sum_{n=0}^{N} f_n\right| \leq g$ μ.p.p.

Alors $f \in L^1$ et $\int \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int f_n$

II- Interversion d'intégrales

Thm 15 : Théorème de Fubini ≥ 0

Soit $(E_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ espaces mesurés, μ_i σ-fini $(i=1,2)$ et $f \in \mathcal{M}(E_1 \times E_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2, \overline{\mathbb{R}}_+)$.

Alors : (1) $\forall x_1 \in E_1$ $x_2 \longmapsto f(x_1, x_2) \in \overline{\mathcal{M}}_+(E_2)$

$\forall x_2 \in E_2$ $x_1 \longmapsto f(x_1, x_2) \in \overline{\mathcal{M}}_+(E_1)$

(2) $x_1 \longmapsto \int f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2) \in \overline{\mathcal{M}}_+(E_1)$

$x_2 \longmapsto \int f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1) \in \overline{\mathcal{M}}_+(E_2)$

(3) $\int f(x_1, x_2)\, d\mu_1 \otimes \mu_2(x_1, x_2) = \int \left(\int f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2)$

$= \int \left(\int f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1)$

Contre ex 16 : $([0,1], \mathcal{B}, d\mu)$ $([0,1], \mathcal{B}, d\rho)$ $d\mu$ mesure de Lebesgue, $d\rho$ mesure de comptage.

$$\int \left(\int \mathbb{1}_{(x=y)}(x,y)\, d\mu(x) \right) d\rho(y) = 0 \neq 1 = \int \left(\int \mathbb{1}_{(x=y)}(x,y)\, d\rho(y) \right) d\mu(x)$$

Thm 17 : Théorème de Fubini

Soit $f \in L^1(E_1 \times E_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$, alors

(1) $x_2 \longmapsto f(x_1, x_2) \in L^1(E_2)$ μ_1 p.p.

$x_1 \longmapsto f(x_1, x_2) \in L^1(E_1)$ μ_2 p.p.

(2) $x_1 \longmapsto \int f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2) \in L^1(E_1)$

$x_2 \longmapsto \int f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1) \in L^1(E_2)$

(3) $\int f(x_1, x_2)\, d\mu_1 \otimes \mu_2(x_1, x_2) = \int \left(\int f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2)$

$= \int \left(\int f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1)$

Contre ex 18 : Soit $0 = \delta_0 < \delta_1 < \dots < \delta_n \to 1$, g_n C^0 telle que $\mathrm{Supp}(g_n) \subset]\delta_n, \delta_{n+1}[$ et $\int_0^1 g_n = 1$.

Soit $f = \sum_{n=0}^{+\infty} (g_n(x) - g_{n+1}(x)) g_n(y)$.

Alors $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy = 0 \neq 1 = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx$

Application 19 : Calcul de $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$

Application 20 : Convolution

Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors
- $f * g(x) = \int f(x-y) g(y)\, dy = \int f(y) g(x-y)\, dy$ est bien défini p.p
- $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$
- $\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^1}$.

III - Régularité des intégrales à paramètre

1) Fonctions à variables réelles.

Thm 21 : Théorème de continuité [dérivabilité] sous le signe $\int$.

Soit $f : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Supposons que

- μ p.p. $t \mapsto f(x,t)$ est continue [dérivable]
- $\forall t \in \mathbb{R}$ $x \mapsto f(x,t) \in \mathcal{M}(E)$.
- $\forall K \subset\subset \mathbb{R}$ $\exists g \in L^1(E)$ tq $\forall t \in K$ μ p.p. $|f(x,t)| \leq g(x)$

  $[\exists h \in L^1(E)$ tq $\forall t \in K$ μ p.p. $|\partial_t f(x,t)| \leq h(x)]$

Alors
- $\forall t \in \mathbb{R}$ $x \mapsto f(x,t) \in L^1(E)$ [et $x \mapsto \partial_t f(x,t) \in L^1(E)$]
- $F : t \in \mathbb{R} \mapsto \int f(x,t) dx$ est continue [dérivable]

[$\cdot \forall t \in \mathbb{R}$ $F'(t) = \int \partial_t f(x,t) d\mu(x)$]

Ex 22 : $\Gamma : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_{\mathbb{R}} x^{t-1} e^{-x} dx$ est C^∞.

Application 23 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors
- $\mathcal{F}(f) \in C^0(\mathbb{R}^n)$
- de plus si $f \in C^p(\mathbb{R}^n)$ $(p \geq 1)$ $\mathcal{F}(f)(\xi) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\|\xi\|^p}\right)$

Application 24 : Soit $f \in C^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Alors $f * g \in C^p(\mathbb{R}^n)$ et $\partial^\alpha f * g = (\partial^\alpha f) * g$ $\forall |\alpha| \leq p$.

$\to$ Conséquence : La densité de C_c^∞ dans $(L^p, \|\cdot\|_p)$ et la convolution $\Rightarrow C^1$ est dense dans $(L^p, \|\cdot\|_p)$

On peut donc améliorer app 23 : $\forall f \in L^1$ $\mathcal{F}(f)(\xi) \underset{\|\xi\| \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

2) Fonctions à variables complexes

Thm : holomorphie sous le signe $\int$

Soit $f : E \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Supposons que
- μ p.p. $z \mapsto f(x,z)$ est holomorphe
- $\forall z \in \mathbb{C}$ $x \mapsto f(x,z) \in \mathcal{M}(E)$
- $\forall K \subset\subset \mathbb{C}$ $\exists g \in L^1(E)$ tq $\forall z \in K$ μ p.p. $|f(x,z)| \leq g(x)$

Alors :
- $\forall z \in \mathbb{C}$ $x \mapsto f(x,z) \in L^1(E)$
- $F : z \in \mathbb{C} \mapsto \int f(x,z) d\mu(x)$ est holomorphe
- $F'(z) = \int \partial_z f(x,z) d\mu(x)$.

Lemme : Formule sommatoire de Poisson ZQ

Soit $F \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$. On suppose que
- $\exists M > 0$, $\exists \alpha > 1$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$ $|F(x)| \leq \frac{M}{(1+|x|)^\alpha}$
- $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{F}(n)| < +\infty$

Alors $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{F}(n)$

Thm : Il existe une unique fonction ζ holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ tq $\forall s \in \mathbb{C}$ $\mathrm{Re}(s) > 1$ $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ ZQ. DVPT 1

IV. Autres théorèmes d'interversion

Thm : Théorème d'Abel

Soit $\sum a_n z^n$ S.E de rayon de cv ≥ 1 tq $\sum a_n$ converge.

On note f sa somme et $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

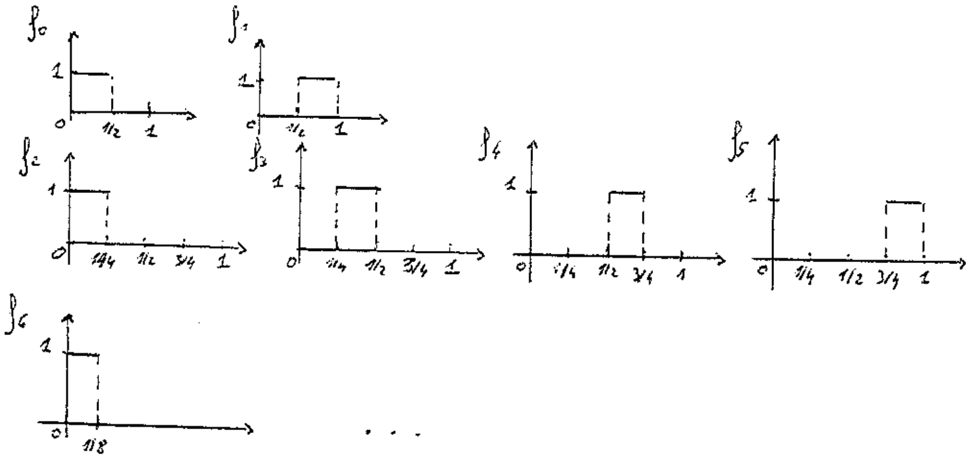
Alors $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ où Δ_{θ_0} est défini en annexe.

Thm : Théorème Taubérien Faible :

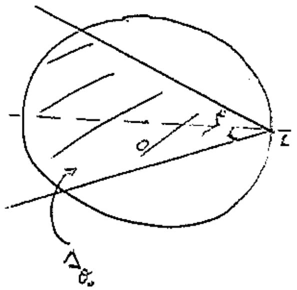
Réciproquement si on suppose que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$

Alors $\sum a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x)$ DVPT 2

Annexe 1 :



Annexe 2 :



Références :

- Analyse pour l'agrégation - Zuily - Queffélec
- Analyse réelle et complexe - Rudin
- Intégration pour la licence - Gapaillard
- Analyse - Gourdon
- Probabilité - Barbe - Ledoux.

Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible

Leçons : 207, 223, 230, 235, 241, 243, 244

[Gou An], exercices 4.4.10-11

Théorème (*Abel angulaire*)

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\geqslant 1$ et telle que $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge.
On note f sa somme sur $\mathcal{D}(0,1)$, on fixe $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et on pose :

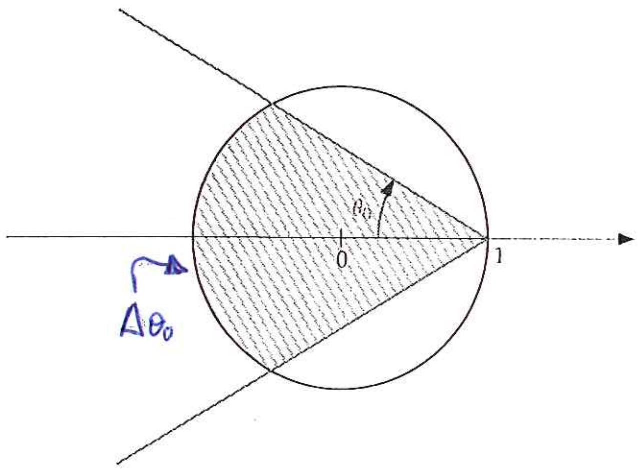
$$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\} \cap \left\{1 - \rho e^{i\theta} \,\middle|\, \rho \in \mathbb{R}^{+*}, \theta \in [-\theta_0, \theta_0]\right\}.$$

Alors on a : $\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.[1]

Démonstration :

$\rightarrow$ Soient $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n$ et $R_N = S - S_N$, pour $N \in \mathbb{N}$.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$, avec $|z| < 1$ et $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N
&= \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) + a_0 - a_0 \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n \left(z^{n+1} - 1\right) - \sum_{n=1}^{N} R_n (z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n \left(z^{n+1} - z^n\right) - R_N \left(z^N - 1\right) + 0R_0 \\
&= (z-1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N \left(z^N - 1\right)
\end{aligned}$$



Donc, par passage à la limite $N \to +\infty$, on obtient :

$$f(z) - S = (z-1) \sum_{n=0}^{\infty} R_n z^n \qquad (1)$$

$\rightarrow$ Soit $\varepsilon > 0$, et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N, |R_n| < \varepsilon$.
Alors, pour $|z| < 1$, d'après (1), on a :

$$|f(z) - S| \leqslant |z-1| \left| \sum_{n=0}^{N} R_n z^n \right| + |z-1|\varepsilon \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |z|^n \right) \leqslant |z-1| \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n| \right) + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|} \qquad (2)$$

$\rightarrow$ Soit $z = 1 - \rho e^{i\varphi} \in \Delta_{\theta_0}$, où $\rho > 0$ et $|\varphi| \leqslant \theta_0$.
Alors $|z|^2 = \left(1 - \rho e^{i\varphi}\right)\left(1 - \rho e^{-i\varphi}\right) = 1 - 2\rho\cos\varphi + \rho^2$.
Mais quand $z \to 1$, $\rho \to 0$ et pour $\rho \leqslant \cos\theta_0$, on a :

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = (1+|z|)\frac{|z-1|}{1-|z|^2} \leqslant 2\frac{\rho}{2\rho\cos\varphi - \rho^2} \leqslant \frac{2}{2\cos\varphi - \rho} \leqslant \frac{2}{2\cos\theta_0 - \cos\theta_0} = \frac{2}{\cos\theta_0}$$

1. On a quelques applications de ce résultat : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

→ Soit $\alpha > 0$, tel que $\alpha \sum_{n=0}^{N} |R_n| < \varepsilon$.

Alors, quand $z \in \Delta_{\theta_0}$ est tel que $|z-1| \leqslant \min\{\alpha, \cos\theta_0\}$, par (2) :

$$|f(z) - S| \leqslant \varepsilon + \varepsilon \frac{2}{\cos\theta_0}$$

■

Théorème (*Taubérien faible*)

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\geqslant 1$, on note f sa somme sur $\mathcal{D}(0,1)$.
On suppose : $\exists S \in \mathbb{C}, \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = S$.
Si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ [2], alors $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge et $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. [3]

Démonstration :

→ Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_N := \sum_{n=0}^{N} a_n$ et pour $x \in]0,1[$, on a :

$$S_N - f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n (1 - x^n) - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n$$

Et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(1-x^n) = (1-x)\left(1 + x + \ldots + x^{n-1}\right) \leqslant (1-x)n$.
Ainsi :

$$|S_N - f(x)| \leqslant (1-x)\sum_{n=1}^{N} n\,|a_n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{n}{N}|a_n|\, x^n \leqslant (1-x)MN + \sup_{n>N}(n\,|a_n|)\,\frac{1}{N(1-x)},$$

où M est un majorant de la suite $(n\,|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$, suite qui tend vers 0.

→ Soit $\varepsilon > 0$, avec $\varepsilon < 1$. On a :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \left|S_N - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{N}\right)\right| \leqslant \varepsilon M + \sup_{n>N}(n\,|a_n|)\,\frac{1}{\varepsilon}.$$

→ Dès lors, si N_0 est tel que $\sup_{n>N_0}(n\,|a_n|) < \varepsilon^2$, alors :

$$\forall N \geqslant N_0, \left|S_N - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{N}\right)\right| \leqslant M\varepsilon + \varepsilon = (M+1)\varepsilon$$

Par hypothèse, on a : $\lim_{N\to\infty} f\left(1 - \frac{\varepsilon}{N}\right) = S$, donc $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall N \geqslant N_1, \left|f\left(1-\frac{\varepsilon}{N}\right) - S\right| \leqslant \varepsilon$.
En fin de compte, par inégalité triangulaire, il vient :

$$\forall N \geqslant \max\{N_0, N_1\}, |S_N - S| \leqslant (M+2)\varepsilon.$$

■

Références

[Gou An] X. GOURDON – *Les maths en tête : Analyse*, 2e éd., Ellipses, 2008.

2. Cette condition s'appelle condition taubérienne.

3. Il s'agit d'une réciproque partielle au théorème d'Abel angulaire. Il reste vrai en supposant seulement $a_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, et constitue alors le théorème taubérien fort, dont la démonstration est très différente. La réciproque totale du théorème d'Abel angulaire est fausse, comme le montre le contre-exemple suivant : $\lim_{\substack{z\to 1\\ |z|<1}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \lim_{\substack{z\to 1\\ |z|<1}} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$ alors que $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n$ diverge.