Antoine Izabo & Lucien Hennecart.

235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales. 13/12/16.

[GOU] p 222-223 [CQ]

I- Suites et séries de fonctions : propriétés locales de la limite ou de la somme

1- Régularité sous convergences simple et uniforme

Prop 1 : X espace métrique. Une limite uniforme d'une suite de $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ [$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$] est continue.

ex 2 : $u_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$ converge uniformément sur tout sous-espace borné de $\mathbb{K}$ vers exp.

ex 3 : Ce résultat ne vaut pas pour les limites simples : $u_n : x \longmapsto e^{-nx}$ converge simplement vers $u : \begin{cases} 0 \longmapsto 1 \\ x \longmapsto 0 & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$

Prop 4 [contrôle de la dérivée] Soit $(f_n) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. S'il existe $x_0 \in X$ tel que $f_n(x_0) \longrightarrow l_0$, f_n est dérivable ($\forall n$) et il existe $g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ telle que $\|f_n' - g\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ existe, f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f' = g$.

ex 5 : E espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
$$\exp : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$
$$\exp(u) = \sum \frac{u^k}{k!}$$
est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Thm 6 : Une limite simple de fonctions continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur un G_δ dense.

Cor 7. La dérivée d'une fonction dérivable est continue sur un G_δ dense.

Rq 8 : Le théorème persiste pour des fonctions $X \longrightarrow Y$ où X et Y sont des espaces métriques et X complet.

2- Limite en un point

Soit $x \in X$ et $f_n \in \mathcal{C}(X, \mathbb{K})$, $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{K})$, $f_n \to f$ uniformément.

Prop 9 : $\lim_{y\to x} \lim_{n\to\infty} f_n(y) = \lim_{n\to\infty} \lim_{y\to x} f_n(y)$.

Prop 10. Si $f_n \in \mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ est une suite croissante ($f_{n+1} \geq f_n$), alors $\lim_{n\to\infty} \lim_{y\to x} f_n(y) = \lim_{y\to x} \lim_{n\to\infty} f_n(y)$. [GOU]

ex 11 : $\zeta(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x} \xrightarrow[x\to 1^+]{} \infty$.

c-ex 12 : $x \longmapsto x^n$ en $x = 1$.

3- Cas particuliers des séries entières et trigonométriques

Théorème 13 (Abel) : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1 telle que $\sum a_n$ converge. Pour $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on note Δ_{θ_0} le domaine hachuré :

. Alors $\lim_{\substack{z\to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\substack{z\to 1 \\ z\in\Delta_{\theta_0}}} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. [GOU] p 252

Théorème 14 (taubérien d'Hardy-Littlewood). Soit $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $b_n = O(\frac{1}{n})$ et $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ existe et vaut $l \in \mathbb{R}$. Alors $\sum b_n$ est une série convergente de somme l. [GOU] p 289 ex 15) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} \xrightarrow[x\to -1]{} -\ln 2$

C-ex 16 : $\sum_{n\geq 0} x^n =: f(x)$; $f(x) = \frac{1}{1-x}$ est prolongeable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $f(-1) = \frac{1}{2}$ tandis que $\sum (-1)^n$ ne converge pas.

[Je ne connais pas de référence, se prouve avec une transformation d'Abel].

Remarque 17 : [séries trigonométriques].

- $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n\pi x)}{n}$ définit une fonction continue sur $]0,1[$ mais ne converge pas absolument.
- La propriété de convergence absolue de la série de Fourier d'une fonction $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue $\mathcal{C}^1$ par morceaux, 2π-périodique interviennent de façon cruciale dans la résolution du problème de la chaleur : $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. [ZQ]

II - Intégration de familles de fonctions.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré.

1- Intégration sous convergence uniforme. préciser

Prop 18. Si K est un compact de $\mathbb{R}^n$, (f_n) et $f_n \xrightarrow{u} f$ des fonctions continues sur K, Alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_K f_n(t)\,d\lambda(t) = \int_K f(t)\,d\lambda(t).$$

Appli 19 : $\int_0^x \sum_{n\geq 0} t^n\,dt = \ln(1-x) = \sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n}$.

Appli 20 : Théorème de Weierstrass. Si $(f_n)_n \in \mathcal{H}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ converge vers $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ uniformément, alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)^{\mathbb{N}}$. [AM]

2- Intégration de familles de fonctions indexées par $\mathbb{N}$

Théorème [Beppo Levi] 21 : Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de fonctions mesurable ≥ 0 sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Alors $\lim f_n$ est mesurable et $\int_X \lim f_n\,d\mu = \lim \int_X f_n\,d\mu$. [BRI] p117

Appli 22 : [Formule d'Euler de la fonction Gamma].
$\forall z\in\mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0$, $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\,dt = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}$ [GOU] p295

Rq : Ce théorème permet d'étendre les propriétés de l'intégrale des fonctions positives aux fonctions intégrables [linéarité entre autres]

Théorème 22 [Lemme de Fatou].
Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions $\mathcal{A}$-mesurables positives. Alors $0 \leq \int_X \liminf_n f_n\,d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n\,d\mu$. [BRI] p132

Application 23. Si $f : [0,1]$ est continue en 0 et 1, dérivable pp, croissante, alors $\int_0^1 f'(t)\,dt \leq f(1) - f(0)$; inégalité stricte pour $f = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}$. [BRI] p133

Théorème 24 [de convergence dominée] [TCD]
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}^1(\mu)$ vérifiant :
(i) $\mu(dx)$-pp, $f_n(x)$ converge
(ii) $\limsup_n |f_n| \in L^1(\mu)$.
Alors en posant $f = \limsup_n f_n$, [BRI] p134

- f_n converge vers f μ-pp
- $\int_X |f_n - f|\,d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, en particulier $\int_X f_n\,d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X f\,d\mu$.

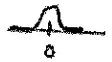
[AM]p243 [BRI]p149

Application 25. [Formule de Stirling]

$$\Gamma(t) \underset{\infty}{\sim} \left(\frac{t}{e}\right)^t \sqrt{2\pi t}$$

Application 26. [Formule des compléments]. $\boxed{\text{DEV 1}}$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$ [égalité de fonctions méromorphes]

Contre-exemple 27 [bosse glissante] $x \mapsto \frac{f(x+n)}{n}$, $f =$ 

[BRI]p161.

Proposition 28: [réciproque partielle]. Si $\int |f_n - f|\,d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ extractrice, $|f_{\varphi(n)} - f| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

pas de sous-jacent reste

Appli 29: Une application de ces théorèmes de convergence est constituée par les marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$: $\boxed{\text{DEV 2}}$

(Polyà) [DH]p32

Théorème 30: Soit $d \geq 1$, $(e_1, \dots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformes à valeurs dans $\{\pm e_i \mid 1 \leq i \leq d\} =: S$. Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$. Alors,

- si $d \leq 2$, $(S_n)_{n\geq 0}$ revient p.s infiniment souvent en 0
- si $d \geq 3$, $\|S_n\| \to \infty$ p.s.

3 - Intégrales à paramètres [en application du TCD]

(E,d) espace métrique

[BRI]p138

Théorème 31 [limite sous l'intégrale]. Soit $f : E \times X \to \mathbb{K}$. Soit $u_0 \in E$. On suppose qu'il existe un voisinage V_0 de u_0 dans E tel que :

(i) $\forall u \in V_0$, $f(u, \cdot)$ est mesurable

(ii) $\mu(dx)$ pp, $f(\cdot, x)$ est continue en u_0

(iii) $\exists g \in L^1(\mu)$ telle que $\forall u \in V_0$, $|f(u,x)| \leq g(x)$.

Alors $F := \int_X f(\cdot, x)\,dx$ est continue en u_0 et

$$\lim_{u\to u_0} F(u) = \int_X f(u_0, x)\mu(dx).$$

ex. $\Gamma(t) := \int_0^\infty e^{-u} u^{t-1}\,du$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

[BRI]p141.

Théorème 32. $E = I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert, $u_0 \in I$. Si f vérifie : (i) $\forall u \in I$, $f(u, \cdot) \in L^1(\mu)$

(ii) $\mu(dx)$ pp, $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x)$ existe

(iii) $\exists V_0$ voisinage de u_0, $\exists g : X \to \mathbb{K}$, $g \in L^1(\mu)$ et $\forall (u,x) \in V_0 \times X$, $\left|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\right| \leq g(x)$,

alors $F(u) = \int_X f(u,x)\mu(dx)$ est défini en u_0 et dérivable en u_0, de dérivée $F'(u_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x)\mu(dx)$.

Application 33. Théorème d'holomorphie sous l'intégrale

Application 34: injectivité de la transformée de Fourier $L^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

⚠ ne pas dépasser 4 pages!

· calcul de transformées de Fourier par dérivation sous l'intégrale : e^{-x^2}, $\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(\xi) = e^{-|\xi|}$.

III – Intégration multidimensionnelle.

[BRI] p 222.

Théorème 35 [Fubini – Tonelli]. Soit $f : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, μ, ν mesures σ-finies sur $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$.

(a) $x \mapsto \int_Y f(x,y)\nu(dy)$; $y \mapsto \int_X f(x,y)\mu(dx)$ sont resp. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$-mesurables.

(b) $$\int_{X\times Y} f \, d\mu\otimes\nu = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\nu(dy)\right)\mu(dx) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\mu(dx)\right)\nu(dy)$$

Théorème 36 [Fubini – Lebesgue]. La conclusion persiste si $f \in L^1(\mu\otimes\nu)$.

Application à des calculs astucieux de sommes.

Les détails des calculs sont dans un polycopié intitulé « Evaluating $\zeta(2)$ » de Robin Chapman, de l'université d'Exeter.

· $$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy}\,dx\,dy = \frac{\pi^2}{6}$$

· $$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-(xy)^2}\,dx\,dy = \frac{\pi^2}{8}$$

· Volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$. V_n.

· Formule d'inversion de Fourier.

Références :

[BRI] M. Briane & G. Pagès, Théorie de l'intégration

[GOU] X. Gourdon, Analyse

[DM] Dym & McKean, Fourier Series and Integrals

[AM] E. Amar & E. Matheron, Analyse complexe.

[CQ] D. Choimet & H. Queffélec, Analyse mathématique, Grands théorèmes du XXème siècle

[ZQ] C. Zuily & H. Queffélec, Analyse pour l'agrégation

[CH] R. Chapman "Evaluating $\zeta(2)$".

Formule des compléments

Références : Amar, Matheron, *Analyse complexe*, p 249-251

Théorème.

On rappelle qu'on définit la fonction Gamma d'Euler par :

$$\forall z \in \{s \in \mathbb{C} | \Re(s) > 0\}, \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

On a l'égalité suivante :

$$\forall z \in \{s \in \mathbb{C} | 0 < \Re(s) < 1\}, \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

Démonstration. D'après le théorème des zéros isolés, il suffit de prouver l'égalité pour $z = \alpha \in]0,1[$. Soit donc $\alpha \in]0,1[$.
En utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) &= \left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} s^{-\alpha} e^{-s}\, \mathrm{d}s\right) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} s^{-\alpha} t^{\alpha-1} e^{-t-s}\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}s \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{s}\right)^{\alpha} e^{-(s+t)}\, \mathrm{d}s\, \frac{\mathrm{d}t}{t}\end{aligned}$$

On réalise le changement de variables donné par le système $\begin{cases} u &= s+t \\ v &= \frac{s}{t} \end{cases}$ et dont le jacobien vaut

$$\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{t} & \frac{-s}{t^2}\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{t} + \frac{s}{t^2} = \frac{1}{t} + \frac{v}{t} = \frac{v+1}{t}$$

On en déduit donc :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} v^{-\alpha} e^{-u} \frac{\mathrm{d}u\, \mathrm{d}v}{v+1} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{v^{\alpha}(v+1)} \int_0^{+\infty} e^{-u}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}v}{v^{\alpha}(v+1)}.$$

Le lemme suivant termine la preuve. □

Lemme.

On a l'égalité suivante :

$$\forall \alpha \in]0,1[, \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}(1+t)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

Démonstration. $\forall \alpha \in]0,1[$, on définit $I_\alpha := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}(1+t)}$.
I_α est bien définie car c'est l'intégrale d'une fonction mesurable positive ; on a même $I_\alpha < +\infty$. En effet :

— $t \mapsto \dfrac{1}{t^{\alpha}(1+t)}$ est continue sur $]0,+\infty[$ (donc localement intégrable) ;

— En 0 : $\dfrac{1}{t^{\alpha}(1+t)} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha}}$, qui est intégrable car $0 < \alpha < 1$;

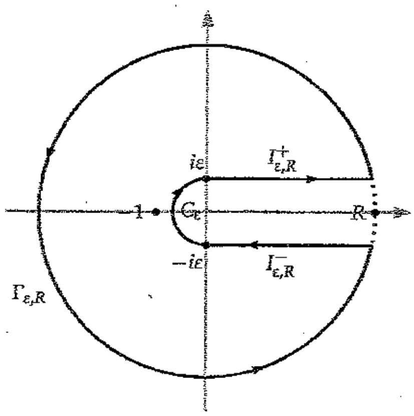
— En $+\infty$: $\dfrac{1}{t^{\alpha}(1+t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha+1}}$, qui est intégrable car $\alpha + 1 > 1$.

On note $\Omega = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$, on prend la définition de l'argument associée à Ω[1] et on note $f : \left| \begin{array}{ccc} \Omega\backslash\{-1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{1}{z^\alpha(1+z)} \end{array} \right.$,

où l'on convient $z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$ quand $z = re^{i\theta}$, où $\theta \in]0, 2\pi[$.

La fonction f est holomorphe sur $\Omega\backslash\{-1\}$ et possède un pôle simple en -1 avec :

$$\text{Res}(f, -1) = \lim_{z\to-1} (1+z)f(z) = \frac{1}{(-1)^\alpha} = e^{-i\pi\alpha}$$



Pour $R > 1$ et $\varepsilon < 1$, on définit le chemin orienté (voir dessin) $\gamma_{\varepsilon,R} = C_\varepsilon \cup I^+_{\varepsilon,R} \cup \Gamma_{\varepsilon,R} \cup I^-_{\varepsilon,R}$, où :

— $C_\varepsilon = \left\{\varepsilon e^{i\theta} \middle| \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]\right\}$;

— $I^\pm_{\varepsilon,R} = \left[\pm\varepsilon i, \pm\varepsilon i + \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}\right]$;

— $\Gamma_{\varepsilon,R} = \left\{Re^{i\theta} \middle| \theta \in [\theta_{\varepsilon,R}, 2\pi - \theta_{\varepsilon,R}]\right\}$,
avec $\theta_{\varepsilon,R} = \arctan\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}}\right)$.

Le théorème des résidus donne donc :

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}$$

On va passer à la limite quand $R \to +\infty$ et $\varepsilon \to 0$.

- Sur C_ε, on a
$$\left|\int_{C_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^\alpha(1-\varepsilon)} \times \pi\varepsilon = \frac{\pi\varepsilon^{(1-\alpha)}}{1-\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to0]{} 0.$$

- Sur $\Gamma_{\varepsilon,R}$, on a
$$\left|\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \left|\int_0^{2\pi} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant 2\pi\frac{R^{1-\alpha}}{R-1} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0.$$

- Sur $I^+_{\varepsilon,R}$, on a
$$\int_{I^+_{\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} f(\varepsilon i + t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} \frac{1}{(t+\varepsilon i)^\alpha(1+t+\varepsilon i)}\,\mathrm{d}t.$$

Or $(t+\varepsilon i)^\alpha \xrightarrow[\varepsilon\to0]{} t^\alpha$, donc comme

— $\mathbb{1}_{]0,\sqrt{R^2-\varepsilon^2}]}(t) f(\varepsilon i + t) \longrightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}}(t)\frac{1}{t^\alpha(1+t)}$;

— $\left|\mathbb{1}_{]0,\sqrt{R^2-\varepsilon^2}]}(t) f(\varepsilon i + t)\right| \leqslant \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}}(t)\frac{1}{|t-\varepsilon|^\alpha(1+t)}$ qui est intégrable,

par théorème de convergence dominée, on déduit :

$$\lim \int_{I^+_{\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = I_\alpha$$

- Enfin, de la même façon, en utilisant le fait que $(t-\varepsilon i)^\alpha \xrightarrow[\varepsilon\to0]{} t^\alpha e^{2i\pi\alpha}$[2], on a :
$$\lim \int_{I^-_{\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = -e^{-2i\pi\alpha} I_\alpha$$

Conclusion : en tenant compte de l'orientation des intégrales, notre théorème des résidus donne

$$\left(1 - e^{-2i\pi\alpha}\right) I_\alpha = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}.$$

On a donc bien
$$I_\alpha = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

□

1. Il est important d'insister sur ce point ! Si l'on prenait la détermination sur $]-\pi, \pi[$, nos intégrales ne seraient pas définies.
2. C'est ici que notre définition de l'argument sur $]0, 2\pi[$ prend du sens : dans le premier cas, on est à partie imaginaire positive, alors qu'ici on tend vers t à partie imaginaire négative.

Théorème de Polyà

* On note $e_1, \dots, e_d$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et $E = \{\pm e_i, 1 \le i \le d\} \subseteq \mathbb{Z}^d$.

Théorème (Polyà, 1921). Soient $(X_n)_{n \ge 1}$ des variables aléatoires à val. dans E, indépendantes et de lois uniformes sur E. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Alors : * Si $d \le 2$, $P(\bigcap_{n\ge 1} \bigcup_{k \ge n} \{S_k = 0\}) = 1$.
* Si $d \ge 3$, $P(|S_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty) = 1$.

Preuve. $\mathbb{T}^d := [0,1]^d$, on fixe $t \in \mathbb{T}^d$; $\varphi_n := \varphi_{S_n}$, $\varphi := \varphi_{X_1}$

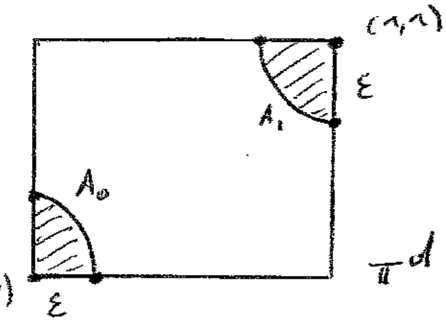
$$\varphi_n(t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} P(S_n = \alpha) e^{2i\pi\langle \alpha, t\rangle} \quad (*)$$
$$= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \Big(\sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \alpha} P(X_1 = \alpha_1, \dots, X_n = \alpha_n) \; e^{2i\pi\langle\alpha_1, t\rangle} \cdots e^{2i\pi\langle \alpha_n, t\rangle}\Big)$$
$$= \sum_{\alpha_1 \in E} \cdots \sum_{\alpha_n \in E} \left(\frac{1}{2d}\right)^n e^{2i\pi\langle\alpha_1, t\rangle} \cdots e^{2i\pi\langle \alpha_n, t\rangle} = \Big(\frac{1}{2d} \sum_{\alpha \in E} e^{2i\pi\langle\alpha, t\rangle}\Big)^n$$
$$= \varphi(t)^n = \Big(\frac{1}{d} \sum_{i}^{d} \cos(2\pi t_i)\Big)^n.$$

* La fonction $\varphi : \mathbb{T}^d \to [-1,1]$ est continue, vaut 1 (exactement) en $(0,\dots,0)$ et $(1,\dots,1)$.
Or la somme $(*)$ est finie (à n fixé) donc :
$$\int_{\mathbb{T}^d} \varphi(t)^n e^{-2i\pi\langle\alpha, t\rangle} dt = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^d} P(S_n = \beta) \int_{\mathbb{T}^d} e^{2i\pi\langle \beta - \alpha, t\rangle} dt = P(S_n = \alpha)$$
(on est intéressé par $\alpha = (0,\dots,0)$).

* Soit $(\alpha_k) \in (0,1)$ une suite telle que $\alpha_k \nearrow 1$; on écrit alors :
$$\sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{k\to\infty} \alpha_k^n P(S_n = 0)$$
$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_k^n P(S_n = 0) \qquad \text{(Beppo-Levi)}$$
$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{T}^d} \alpha_k^n \varphi(t)^n dt$$
$$= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{T}^d} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_k^n \varphi(t)^n\Big) dt \qquad \underline{\text{TCD}}$$
$$= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{dt}{1 - \alpha_k \varphi(t)} \qquad \text{(série géo.)}$$
$$= \int_{\mathbb{T}^d} \Big(\lim_{k\to\infty} \frac{1}{1 - \alpha_k \varphi(t)}\Big) dt \qquad \text{(Beppo Levi)}$$
$$= \int_{\mathbb{T}^d} \frac{dt}{1 - \varphi(t)} \; ; \quad \Big(\text{notons que } \frac{1}{1-\varphi} \ge 0\Big)$$

• on regarde donc cette intégrale, qui n'a pas de problèmes en dehors de $(0,\dots,0)$ et $(1,\dots,1)$. on partitionne :

où l'on choisit $\varepsilon < 1/\sqrt{2}$.



• par changement de variable, il suffit d'étudier l'intégrabilité sur A_0.

or $\frac{1-\cos(\theta)}{\theta^2} \xrightarrow[\theta \to 0]{} 1/2$ donc

on peut choisir $0 < \eta_0 < 1/2 < \eta_1 < 1$ tels que : $\frac{1-\cos(2\pi t_i)}{4\pi^2 t_i} \in [\eta_0, \eta_1]$ $\forall t_i \in [0,\varepsilon)$

donc sur A_0 :
$$\frac{d}{4\pi^2 \eta_0 \|t\|^2} \leq \frac{1}{1-\varphi(t)} \leq \frac{d}{4\pi^2 \eta_1 \|t\|^2}$$

Donc $\frac{1}{1-\varphi} \in L^1(\mathbb{T}^d) \iff d \geq 3$. $(*)$

conclusion.

* $d \geq 3$. Par Borel-Cantelli, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{k \geq m} \{S_k = 0\}\right) = 0$;

De l'invariance par translation du problème, ceci est vrai pour tout point

* Si $d \leq 2$ Soit $p = \mathbb{P}(\exists n \geq 0, S_n = 0)$. On note N le nbre de retours en 0, instant initial exclu.

$\forall m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(N \geq m) = p^m$.

Supposons (par l'absurde) que $p < 1$, on a :
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N] &= \sum_{m \geq 0} \mathbb{P}(N = m)\, m \\
&= \sum_{m \geq 0} \left(\mathbb{P}(N \geq m) - \mathbb{P}(N \geq m+1)\right) m \\
&= \sum_{m \geq 0} (p^m - p^{m+1})\, m \\
&= \sum_{m \geq 0} m p^m (1-p) \\
&= \frac{1}{1-p} < \infty \quad (\text{car } p < 1)
\end{aligned}$$

or $\mathbb{E}[N] = \sum_{n > 0} \mathbb{P}(S_n = 0)$, ce qui contredit $(*)$. ∎