Organiser le plan : par "problèmes". | CVU, CVD Lebesgue. (Base).

235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales

Par défaut, E désignera un espace de Banach, et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - RÉSULTATS DE CONVERGENCE UNIFORME

1 - Propriétés de la limite uniforme et conséquences [Gou]

Déf 1. Soit X un ensemble, (E,d) un espace métrique (e.m.) et $(f_n)_n \in (E^X)^{\mathbb{N}}$. On dit que $(f_n)_n$ converge uniformément sur X vers $f : X \to E$ si : $\forall \varepsilon>0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in X$, $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. On notera $f_n \xrightarrow[n\infty]{CVU/X} f$.

Thm 2. Soit (E,d) et (F,δ) deux e.m. et $(f_n)_n \in (F^E)^{\mathbb{N}}$. Si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CVU/E} f$ et si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en $x_0 \in E$, alors f est continue en x_0.

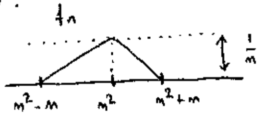
Prop 3. Soit $(f_n)_n \in \mathcal{C}^0([a,b],E)^{\mathbb{N}}$ / $f_n \xrightarrow[n\infty]{CVU/[a,b]} f : [a,b] \to E$. Alors f est continue et $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$

Ex 4. $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto (1+\frac{x}{n})^n$ CVU / $[0,1]$ vers $x \mapsto e^x$

Donc $\int_0^1 (1+\frac{x}{n})^n\,dx \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 e^x\,dx = e-1$

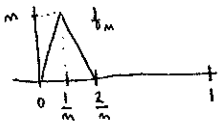
[Hau]

C-ex 5.



$f_n \xrightarrow[n\infty]{CVU/\mathbb{R}} 0$ mais $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1 \not\to 0 = \int_{\mathbb{R}} 0$

C-ex 6.



$f_n \xrightarrow[n\infty]{CVS/[0,1]} 0$

$\int_{\mathbb{R}} f_n = 1 \not\to 0 = \int_{\mathbb{R}} 0$

Cor 7. Soit $(f_n)_n \in \mathcal{C}^1([a,b],E)^{\mathbb{N}}$. On suppose que

(i) $\exists x_0 \in [a,b]$ / $(f_n(x_0))_n$ CV

(ii) $(f_n')_n$ CVU / $[a,b]$ vers $g : [a,b] \to E$

Alors $f_n \xrightarrow[n\infty]{CVU/[a,b]} f \in \mathcal{C}^1([a,b],E)$ vérifiant $f' = g$

C-ex 8. $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{x}{1+n^2x^2}$ $\in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est telle que $f_n' \xrightarrow[n\infty]{CVU/\mathbb{R}} g \neq f'$ [Hau]

C-ex 9. $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$ $\mathcal{C}^1$ $\xrightarrow[n\infty]{CVU/\mathbb{R}}$ $(x \mapsto |x|)$ non dérivable en 0

2 - Cas des séries de fonctions

Prop 10. Si $\sum g_n$ est une série de fonctions continues de $[a,b]$ dans E qui converge normalement (CVN) sur $[a,b]$ alors

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b g_n(t)\,dt\right)$$

Prop 11. Si $\sum g_n$ est une série de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, et si

(i) $\exists x_0 \in [a,b]$, $\sum g_n(x_0)$ CV

(ii) $\sum g_n'$ CVN / $[a,b]$

Alors $\sum g_n$ CVN / $[a,b]$ vers une fonction $\mathcal{C}^1$, et

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} g_n'$$

Appli 12. $\boxed{\text{DEV 1}}$ **Formule sommatoire de Poisson**

Soit $f \in S(\mathbb{R})$. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\cdot+n)$ CVN sur tout compact de $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, e^{2i\pi n x}$$

où $\hat{f}(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2i\pi x t}\,dt$ pour $x \in \mathbb{R}$

Corollaire $\forall s>0$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi n^2}{s}}$

C-ex 13. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (1-x)x^n$ $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \mathbb{1}_{[0,1[}(x)$ (non continu)

3 - Cas des séries entières

Thm 14. L'application $f : D(0,R) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (où R désigne le rayon de convergence)

Appli 15. (Principe des zéros isolés) Soit f la somme de la série entière $\sum a_n z^n$ sur son disque ouvert de convergence. S'il existe $(z_p)_{p\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $z_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ et $\forall p, f(z_p) = 0$ alors $a_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Csq 16. Si $f = \sum a_n z^n$ et $g = \sum b_n z^n$ vérifient $\forall p$ $f(z_p) = g(z_p)$ où $(z_p)_p \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$ vérifie $z_p \xrightarrow[p\infty]{} 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$

Rq 17. Les propositions 11 et 12 s'appliquent sur tout segment contenu dans le disque ouvert de convergence.

C-ex 18. $\sum \frac{z^n}{n}$ DV grossièrement en 1 mais admet une limite en -1.

II - RÉSULTATS DE THÉORIE DE LA MESURE [BP]

Dans la suite, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ désignera un espace mesuré.

1- Convergence monotone et premières conséquences

Thm 19. (Convergence monotone, Beppo Levi) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors $f := \lim_n f_n$ est mesurable positive et $\int_X f \, d\mu = \lim_{n\infty} \int_X f_n \, d\mu$

Ex 20. $I_n(\alpha) := \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} \, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$I_n(\alpha) \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-1)x} \, dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Thm 21. (Lemme de Fatou) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors

$$0 \leq \int_X \underline{\lim}_n f_n \, d\mu \leq \underline{\lim}_n \int_X f_n \, d\mu \leq +\infty$$

Appli 22. Si $\lim f_n = +\infty$, alors $\lim_n \int_X f_n \, d\mu = +\infty$ si $\mu(X) > 0$

2- Convergence dominée

Thm 23. (Convergence dominée, Lebesgue) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions intégrables vérifiant

(i) $(f_n(x))_n$ CV μ-p.p.

(ii) $\exists g$ intégrable positive telle que $\forall n \geq 1$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ-pp

Alors il existe f intégrable telle que

(i') $f_n(x) \xrightarrow[n\infty]{} f(x)$ μ-pp

(ii') $\lim_n \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$; $\lim_n \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$

Rq 24. Le théorème 23 est plus fort que la proposition 3 au sens où les cas d'application de cette dernière font partie des cas où il s'applique.

Ex 25. $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^n \xrightarrow{CVS/[0,1]} \left(x \overset{f}{\longmapsto} \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \right)$

la CV n'est pas uniforme, mais $\int_0^1 f_n = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\infty]{} 0 = \int_0^1 f$

C-ex 26. Soit f $\mathcal{C}^0$ nulle hors de $[0,1]$, positive et tq $\int_{\mathbb{R}} f \neq 0$

$f_n : x \mapsto \frac{f(x+n)}{n}$ vérifie $\int f_n \longrightarrow 0 = \int \lim f_n$

mais sans CVU sur un segment, ni domination

Appli 27. (Équation de la chaleur en dimension 1 sur un anneau)

DEV 2

Soit $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction non nulle, continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique. Alors il existe une unique solution 2π-périodique par rapport à x, $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ au problème ci-contre.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

Cor 28. (Cas des séries de fonctions) Soit (φ_n) une suite de fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$.

(i) Si $\varphi_n \geq 0$, $\forall n \geq 1$, alors $\int_X \left(\sum_{n\geq1} \varphi_n \right) d\mu = \sum_{n\geq1} \int_X \varphi_n \, d\mu$

(ii) Si $\sum_{n\geq1} \int_X |\varphi_n| \, d\mu < +\infty$, alors les fonctions φ_n, $\sum |\varphi_n|$ et $\sum \varphi_n$ (définie μ pp) sont intégrables. De plus

$$\int_X \left(\sum_{n\geq1} \varphi_n \right) d\mu = \sum_{n\geq1} \int_X \varphi_n \, d\mu$$

Appli 29. (Lemme de Borel-Cantelli) Soit $(A_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Alors,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n) < +\infty \Rightarrow \mu\left(\overline{\lim_n} A_n \right) = 0$$

3- Régularité des intégrales à paramètres

Dans cette section, on se donne une application $f : E \times X \to K$. Ici, E est un e.m.

Thm 30. (Continuité sous $\int$) Soit $u_0 \in E$. Si

(i) $\forall u \in E$, $x \mapsto f(u,x)$ est mesurable

(ii) $u \mapsto f(u,x)$ est $\mathcal{C}^0$ en u_0, μ-pp (en x)

(iii) $\exists g \in L^1_{\mathbb{R}_+}$ / $\forall u \in E$, $|f(u,x)| \leq g(x)$ μ-pp (en x)

Alors $F(u) := \int_X f(u,x) \, \mu(dx)$ est définie en tout $u \in E$ et est continue en u_0.

Thm 31. (Dérivation sous $\int$) On suppose ici $E = I$ (intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$). Soit $u_0 \in I$. Si f vérifie

(i) $\forall u \in I$, $f(u,\cdot) \in L^1_K$

(ii) $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x)$ existe μ-pp (en x)

(iii) $\exists g \in L^1_{\mathbb{R}_+}$ / $\forall u \in I$, $|f(u,x) - f(u_0,x)| \leq g(x) |u - u_0|$, μpp(x)

Alors $F(u) := \int_X f(u,x) \mu(dx)$ est définie $\forall u \in I$ et dérivable en u_0, de dérivée $F'(u_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x) \mu(dx)$

Appli 32. (Transformée de Fourier dans L^1) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $\hat{f} : u \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f(x)\,\lambda(dx)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall u \in \mathbb{R}$, $\hat{f}'(u) = i\,\widehat{x f(x)}\,(u)$

Appli 33. (Régularisation par convolution) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et φ dérivable, bornée et à dérivée bornée sur $\mathbb{R}$, alors

$f * \varphi(u) := \int_X \varphi(u-x) f(x)\,\lambda(dx)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall u \in \mathbb{R}$, $(f*\varphi)'(u) = (f * \varphi')(u)$

C-ex 34. (Intégrale à paramètre non continue)

$f : (\mathbb{R}_+)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto x e^{-xt}$ $\qquad F : x \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} f(x,t)\,dt = \begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

Rq 35. On dispose d'un théorème d'holomorphie sous $\int$ similaire au théorème 31 qui, couplé à la formule de Cauchy, permet d'établir le caractère $\mathbb{C}$-$\mathcal{C}^\infty$ des fonctions holomorphes.

Appli 36. (Fonction Γ) $\Gamma : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x}\,dx$ est $\mathcal{C}^\infty$ et vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n+1) = n!$

III - INTERVERSION DE SYMBOLES DE SOMMATION [BP]

Thm 37. (Fubini - Tonelli) Soit $f : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to \overline{\mathbb{R}_+}$ une fonction mesurable, μ et ν deux mesures σ-finies, respectivement sur $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$. Alors

(a) $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\nu(dy)$ et $y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mu(dx)$ sont respectivement $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$-mesurables.

(b) $$\int_{X\times Y} f\, d\mu\otimes\nu = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\nu(dy) \right) \mu(dx) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mu(dx) \right) \nu(dy)$$

Appli 38. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ [BP]

Thm 39. (Fubini - Lebesgue) (mêmes espaces mesurés que pour le théorème 37) Soit $f \in L^1_K(\mu\otimes\nu)$. Alors

(a) $\mu(dx)$-pp, $y \mapsto f(x,y) \in L^1_K(\nu)$ et $\nu(dy)$-pp, $x \mapsto f(x,y) \in L^1_K(\mu)$

(b) $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\nu(dy) \in L^1_K(\mu)$ et $y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mu(dx) \in L^1_K(\nu)$

(c) $$\int_{X\times Y} f\, d\mu\otimes\nu = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\nu(dy) \right) \mu(dx) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mu(dx) \right) \nu(dy)$$

Cor 40. (Séries doubles) Soit $(a_{p,q}) \in K^{\mathbb{N}^2}$. On a

[BP] p 241 $$\sum_{p,q\in\mathbb{N}} |a_{p,q}| = \sum_{p\in\mathbb{N}} \left(\sum_{q\in\mathbb{N}} |a_{p,q}| \right) = \sum_{q\in\mathbb{N}} \left(\sum_{p\in\mathbb{N}} |a_{p,q}| \right) \le +\infty$$

et, si $\sum_{p,q\in\mathbb{N}} |a_{p,q}| < +\infty$, alors

$$\sum_{p,q\in\mathbb{N}} a_{p,q} = \sum_{p\in\mathbb{N}} \left(\sum_{q\in\mathbb{N}} a_{p,q} \right) = \sum_{q\in\mathbb{N}} \left(\sum_{p\in\mathbb{N}} a_{p,q} \right)$$

Ex 41. $\sum_{k=2}^{+\infty} (\zeta(k) - 1) = 1$ (où $\zeta(k) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$) [Gou] p 211

C-ex 42. $f : (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1] \longmapsto 2e^{-2xy} - e^{-xy} \in \mathbb{R}$

$$\int_{[0,1]} \left(\int_{\mathbb{R}_+} f(x,y)\,dx \right) dy = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{[0,1]} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\,dx > 0$$

IV - APPLICATION À L'ANALYSE DE FOURIER [BP] pp 323 326

Thm 43. L'application $f \in L^1 \mapsto \hat{f}$ (définie lors de l'appli 32) est injective. De plus, si $\hat{f} \in L^1$, alors

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, e^{-ix\xi}\,\lambda(d\xi) = \frac{1}{2\pi} \hat{\hat{f}}(-x)$$

Appli 44. L'injectivité donnée par le théorème 43 donne un critère d'identification des variables aléatoires.

Ex 45. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. On a $\hat{f}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$