235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales

I - Les grands théorèmes d'interversion

Rappel : Soit $I = [a,b]$, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv unif vers f sur I
Alors $\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)$, $x_0 \in I$

Prop 1 : Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv uniformément vers f sur I
Alors : $\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx$

Contre-ex 2 : (f_n) : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to f_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^2} \end{array}$ ne converg pas uniformément

Prop 3 : Si (f_n) suite de fonctions continues sur I et si $\sum f_n$ converge uniformément vers S
Alors S est continue sur I et $\int_I S(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_I f_n(x)\,dx$

Théorème 4 : Abel angulaire (DEV 1)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de CV ≥ 1 et sa somme f
Soit $\theta_0 \in [0, \pi/2[$, on pose
$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C},\ |z|<1\} \cap \{z = 1 - \rho e^{i\varphi},\ \rho > 0,\ \varphi \in [-\theta_0, \theta_0]\}$

On suppose que $\sum a_n$ CV
Alors $f(z) \xrightarrow[\substack{z \in \Delta_{\theta_0} \\ z \to 1}]{} \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Exemple 5 : $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

Théorème 6 : Taubérien faible

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de cv ≥ 1 et des somme f
On suppose : • $\exists S \in \mathbb{C}$: $f(x) \xrightarrow[\substack{x \in [-1,1] \\ x \to 1}]{} S$ • $a_n = o(1/n)$

Alors la série CV et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$

Théorème 7 (Convergence monotone) :

Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables sur $A \subset \mathbb{R}$ telles que $f_n(x) \to f(x)$ simplement
Alors f est mesurable et $\int_A f_n \to \int_A f$

Théorème 8 : (Lemme de Fatou)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives, alors :
$0 \leq \int_X \underline{\lim}\, f_n \,d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n \,d\mu < +\infty$

Théorème 9 : (convergence dominée)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues intégrables sur un intervalle I qui vérifie :
- $f_n \to f$ sur I
- $|f_n| \leq g$ sur I avec g intégrable

Alors : $\int_I f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx$

Application 10 : Convergence de la suite
$I_n(\alpha) = \int_0^n (1 + x/n)^n e^{-\alpha x}\,dx$ selon $\alpha \in \mathbb{R}$

II) Cas des intégrales à paramètre

Théorème 11 : Si $f : (t,x) \to f(t,x)$ une fonction de $I \times E$ dans $\mathbb{C}$ avec
I intervalle de $\mathbb{R}$ qui vérifie :

1) (mesurabilité) : $\forall t \in I$, $x \mapsto f(t,x)$ mesurable
2) (continuité) : $\forall x \in E$, $t \to f(t,x)$ continue sur I
3) (domination) $\exists \varphi : E \to \mathbb{R}_+$ mesurable telle que φ intégrable et $\forall t \in I$, $|f(t,x)| \leq \varphi(x)$

Alors $F : t \to F(t) = \int_E f(t,x)\,dx$ est bien définie et continue sur I

Théorème 12 : (dérivation sous le signe intégrable)

En reprenant les notations pour f, on suppose :
- $\forall t \in I$, $x \to f(t,x)$ intégrable
- $\forall x \in E$, $t \to f(t,x)$ dérivable sur I de dérivée $\frac{\partial f}{\partial t}$
- $\exists \varphi : E \to \mathbb{R}_+$ mesurable telle que φ intégrable et $\forall t \in I$, $\forall x \in E$, $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq \varphi(x)$

Alors $F : t \to \int f(t,x)\,dx$ est dérivable sur I

et $\forall t \in I$, $F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx$

Exemple 13 : (Application)

$$I(x) = \int_0^\infty \frac{\sin xt}{t} e^{-t}\,dt = \arctan x$$

Théorème 14 : (Holomorphie)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \times X \to \mathbb{C}$

Supposons :

1) $\forall z \in \Omega$, $x \to f(z,x)$ est intégrable
2) $\forall x \in X$, $z \to f(z,x)$ est holomorphe dans Ω
3) Pour tout compact K de Ω, $\exists g \in L^1$ positive indépendante de z telle que $|f(z,x)| \leq g(x)$, $\forall z \in K$

Alors $F : z \to \int f(z,x)\,dx$ est holomorphe ds Ω et $F'(z) = \int \frac{\partial f}{\partial z}(z,x)\,dx$

Exemple 15 :

La fonction Γ est C^∞ :
$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$ est définie, continue, C^∞ sur $]0,+\infty[$, avec pour dérivées :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n e^{-t} t^{x-1}\,dt$

Théorème 16 : (Fubini - Tonelli)

Soit $f : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable
μ et ν deux mesures σ-finies respectivement sur $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$

Alors les fonctions
$x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\nu(dy)$
$y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mu(dx)$

sont mesurables

Et : $$\int_{X\times Y} f\,d\mu\otimes d\nu = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\nu(dy)\right)\mu(dx) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mu(dx)\right)\nu(dy)$$

Théorème 17 : (Fubini - Lebesgue)

Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu \otimes \nu)$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors :

1) $\begin{cases} \mu(dx) \text{ p.p } & y \mapsto f(x,y) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\nu) \\ \nu(dy) \text{ p.p } & x \mapsto f(x,y) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu) \end{cases}$

2) $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\nu(dy) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\nu)$

$y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mu(dx) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$

3) $$\int_{X \times Y} f \, d\mu \otimes d\nu = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\nu(dy) \right) \mu(dx) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mu(dx) \right) \nu(dy).$$

App 18 :

L'intégrale de Gauss $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$ vaut $\sqrt{\pi}$

III) Application à l'analyse de Fourier.

Def 19 : Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda d)$. La transformée de Fourier de f est une fonction $\hat{f}$ définie en tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi|x)} f(x) \cancel{d}(dx)$$

Théorème 20 : (Riemann - Lebesgue)

Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda d)$,

$$\lim_{|\xi| \to +\infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$$

Exemple 21 : (En dimension 1)

Pour $\varphi(x) = e^{-x^2}$, on a

$$\hat{\varphi}(\xi) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\xi^2}{4}}$$

Théorème 22 : (Fourier - Plancherel)

Soit $f \in L^1 \cap L^2$. Alors $\hat{f} \in L^2$ et $\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{f}\|_2$ DEV 2

Références :

- Briane, Pagès (Théorie intégration)
- Hauchecorne (Contre-exemples en mathématiques
- Gourdon (Analyse)
- Rudin (Analyse réelle et complexe