235

Problèmes d'Interversion de Limite et d'Intégrales

I- Interversion Limite-Intégrale

1- Théorèmes fondamentaux

Dans toute cette partie, on fixe $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.

Th1 (Beppo-Levi)
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ suite croissante de fonctions positives mesurables sur X, $f := \lim_{n\to+\infty} f_n$
Alors $\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\, d\mu$

Ex2 $I_n(\alpha) = \int_0^{n} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} dx$, $n\in\mathbb{N}^*, \alpha\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} I_n(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha<1 \\ +\infty & \text{si } \alpha\geq 1 \end{cases}$

Th3 (Lemme de Fatou)
$(f_n)_{n\geq 1}$ suite de fonctions mesurables positives, $0 \leq \int_X \underline{\lim}\, f_n\, d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n\, d\mu < +\infty$

Ex4 $(f_n)_{n\geq 1}$ suite de fonctions intégrables convergeant simplement vers f,
Si $\sup_n \int_X |f_n|\, d\mu < +\infty$ alors f est intégrable

Ex5 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ croissante, continue en 0 et 1 et dérivable presque partout sur $[0,1]$
Alors $\int_0^1 f'(x)\, dx \leq f(1) - f(0)$

Th6 (Convergence Dominée)
Soient $(f_n)_{n\geq 1}$ suite de fonctions intégrables, f fonction mesurable telle que:
(i) $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ μ.p.p
(ii) il existe g positive intégrable telle que $\forall n\geq 1, \forall x\in X$ $|f_n(x)| \leq g(x)$
Alors f est intégrable et $\lim_n \int_X f_n\, d\mu = \int_X f$.

C-Ex7 L'hypothèse de Domination n'est pas nécessaire. Soit f continue nulle en dehors de $[0,1]$, on pose pour $n\geq 1$, $x\in\mathbb{R}$ $f_n(x) = \frac{f(x+n)}{n}$
Alors $\lim_{n\to\infty} f_n = 0 \in L^1(\mathbb{R})$ et $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx = 0$.

Ex8 $I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x} dx$, $\lim_{n\to+\infty} I_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$ si $\alpha > 1$
$= +\infty$ si $\alpha \leq 1$

Th9 (Interversion Séries-Intégrale)
Soit (φ_n) suite de fonctions mesurables telle que $\sum_{n\geq 1} \int_X |\varphi_n|\, d\mu < +\infty$
Alors φ_n, $\sum_{n\geq 1} |\varphi_n|$ et la fonction définie μ.p.p $\sum_{n\geq 1} \varphi_n$ sont intégrables et $\int_X \left(\sum_{n\geq 1} \varphi_n\right) d\mu = \sum_{n\geq 1} \int_X \varphi_n\, d\mu$

Appli10 (Lemme de Borel-Cantelli)
$(A_n)_{n\geq 1}$ famille de mesurables, $\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) < +\infty \Rightarrow \mu\left(\overline{\lim_n}\, A_n\right) = 0$

Appli11 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $k\in\mathbb{N}^*$, il existe $R\geq 0$ tel que pour $r\geq R$,
$A^{k-1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (re^{it})^k (re^{it} I_n - A)^{-1} dt$

Appli12 (Théorème de Cayley-Hamilton) $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, χ_A polynôme caractéristique de A, $\chi_A(A) = 0$

2- Régularité des intégrales à paramètre

Dans cette partie, $(X, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace mesuré, (E,d) est un espace métrique, on note $f : E\times X \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $F : u\in E \mapsto \int_X f(u,x)\, \mu(dx)$

Th13 (Continuité sous le signe intégral)
On suppose que (i) $\forall u\in E$, $x\mapsto f(u,x)$ est mesurable
(ii) presque pour tout $x\in X$, $u\mapsto f(u,x)$ est continue sur E
(iii) il existe $g\in L^1(X)$ telle que $\forall u\in E$, $|f(u,x)| \leq g(x)$ p.p $x\in X$
Alors F est bien définie et continue sur E.

Ex14 Pour $a,b>0$, $J(a,b) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{ab(a+b)}$

Appli15 Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$,
$F : v\mapsto \int_0^v f(t)\, dt$ est continue sur $\mathbb{R}$

Appli16 (Théorème de D'alembert-Gauss) Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant,
Alors P admet une racine sur $\mathbb{C}$.

C-Ex17 $F : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^{+\infty} x e^{-xt} dt$ n'est pas continue car $f : (x,t) \mapsto x e^{-xt}$ n'est pas dominée.

Th18 (Dérivabilité sous le signe intégrale) $E = I$ intervalle ouvert non vide de I
On suppose que (i) $\forall u\in I$, $x\mapsto f(u,x)$ est intégrable
(ii) p.p $x\in X$, $u\mapsto f(u,x)$ est dérivable et on note $\frac{\partial f}{\partial u}(\cdot,x)$ sa dérivée
(iii) $\exists g\in L^1(\mathbb{R})$ positive telle que $\forall u\in I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\right| \leq g(x)$ p.p $x\in X$
Alors F est dérivable sur I et $F'(u) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\, \mu(dx)$

Ex19 Étude de $F : x\mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$ et Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

Rq20 On peut remplacer dérivable par C^k et avoir une hypothèse de domination sur $\frac{\partial^j f}{\partial u^j}(u,\cdot)$ pour $j = 1, \dots, k$, $u\in I$, Alors F est de classe C^k et $F^{(j)}(u) = \int_X \frac{\partial^j f}{\partial u^j}(u,x)\, \mu(dx)$

Th21 (Holomorphie sous le signe intégral) $E = U$ ouvert de $\mathbb{C}$
On suppose que (i) $\forall z\in U$, $x\mapsto f(z,x)$ est mesurable
(ii) p.p $x\in X$, $z\mapsto f(z,x)$ est holomorphe
(iii) $\exists g\in L^1(X)$, telle que $\forall z\in U$, $|f(z,x)| \leq g(x)$ p.p $x\in X$
Alors F est holomorphe sur U et $F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z,x)\, \mu(dx)$

Ex 22 La fonction Gamma d'Euler $\Gamma : \{z, Re(z)>0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C}, Re(z)>0\}$

De plus, pour z tel que $Re(z)>0$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

Rq 23 Dans les théorèmes 13, 18 et 21, l'hypothèse de domination peut être remplacée par une domination sur tout compact. C'est cette version qui est utilisée en pratique

Rq 24 Dans le théorème 21, la domination de f suffit, ce n'est pas le cas dans le cas réel.

3 - Application à la transformée de Fourier

Def 25 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ la transformée de Fourier de f est la fonction $\hat{f}$ définie par $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx$

Ex 26 $f : x \mapsto \frac{1}{2a} \mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$, $\hat{f}(\xi) = \frac{\sin a t}{a t}$

Th 27 (Riemann-Lebesgue)
On note $\mathcal{F} : f \in L^1(\mathbb{R}) \mapsto \hat{f}$,
(i) $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$
(ii) $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$
(iii) $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ est continue
(iv) $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$ $\lim_{|\xi| \to +\infty} \hat{f}(\xi) = 0$

Autrement dit $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_{\to 0}(\mathbb{R})$ est continue.

Appli 28 Prolongement de $\mathcal{F}$ à $L^2(\mathbb{R})$

Prop 29 $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}$.
(i) On note $\tau_a f : x \mapsto f(x-a)$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{\tau_a f}(\xi) = e^{-i\xi a} \hat{f}(\xi)$
(ii) On note $f_\lambda : x \mapsto f(\lambda x)$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f_\lambda}(\xi) = \frac{1}{\lambda} \hat{f}(\frac{\xi}{\lambda})$
(iii) $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$

Th 30 (Formule d'inversion)
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telque $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors p.p. $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi$

Coro 31 $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_{\to 0}(\mathbb{R})$ est injective

Appli 32 (Théorème de Lévy)
Soient X, Y des variables aléatoires à densité telles que $\varphi_X = \varphi_Y$ alors $X \overset{\mathcal{L}}{=} Y$

Th 33 (Benedicks)
Soit $f \in L^1$, A et B boréliens de $\mathbb{R}$ tels que $f = f\mathbb{1}_A$ et $\hat{f} = \hat{f}\mathbb{1}_B$ p.p.
Si A et B sont de mesure finie alors $f = 0$ p.p.

DVP 1

4 - Interversions Limite - Limite

1 - Le cas des Suites et des Séries de fonctions

Dans cette partie, on fixe (E,d) et (F,δ) 2 espaces métriques

Def 34 Soit $(f_n)_n$ suite de fonctions de E dans F, (f_n) converge uniformément vers $f : E \to F$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\forall x \in X$, $\delta(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$

Th 35 Soit (f_n) suite de fonctions continues de E dans F telle que (f_n) converge uniformément vers $f : E \to F$ alors f est continue sur E.

C-Ex 36 $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-nx}$, $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$ si $x \neq 0$, 1 si $x = 0$, f_n converge simplement vers f et f n'est pas continue.

Th 37 (Double Limite) F espace métrique complet, (f_n) suite de fonctions de $X \subset E$ dans F convergeant uniformément vers f, Soit $a \in \bar{X}$ telque $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n := \lim_{x \to a} f_n(x)$ existe. Alors $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $\lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to a} f_n(x) = \lim_{x \to a} \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$

C-Ex 38 $f_n(x) = \arctan(\frac{x}{n})$, $\lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2} \neq 0 = \lim_{x \to +\infty} \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$.

Th 39 Soit I intervalle réel, (f_n) suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans F convergeant simplement vers $f : I \to F$ et telle que (f_n') converge vers $g : I \to F$ uniformément. Alors $f \in \mathcal{C}^1(I, F)$ et $f' = g$. De plus (f_n) converge uniformément vers f

C-Ex 40 La convergence uniforme de (f_n) vers f ne suffit pas à assurer le caractère $\mathcal{C}^1$ de f. En effet, si c'était le cas, toute fonction continue serait $\mathcal{C}^\infty$ sur un compact car uniformément approchable par une suite de polynôme.

Th 41 Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, on suppose F espace de Banach. Soit (f_n) suite de fonctions $\mathcal{C}^1$ de I dans F telle que (i) $\exists x_0 \in I$, $(f_n(x_0))$ converge
(ii) (f_n') converge uniformément vers $g : I \to F$
Alors (f_n) converge uniformément vers $f : I \to F$ et f est $\mathcal{C}^1$ et vérifie $f' = g$.

Th 42 (Weierstrass Holomorphe)
Soit U ouvert de $\mathbb{C}$, (f_n) suite de fonctions holomorphes sur U qui converge uniformément sur tout compact vers $f : U \to \mathbb{C}$. Alors f est holomorphe sur U et $\forall j \geq 0$, $(f_n^{(j)})$ converge uniformément vers $f^{(j)}$.

2 - Le Cas des Séries Entières

Def 43 On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite complexe

Lemme 44 (Abel)
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ telque $(a_n z_0^n)_{n \geq 0}$ est bornée
Alors $\forall r$, $0 < r < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est normalement convergente sur le disque $\overline{D(0,r)}$

Def 45 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière le rayon de convergence de la série entière est

$R := \sup\{r \geq 0,\ (|a_n| r^n) \text{ est bornée}\} \in \overline{\mathbb{R}_+}$

Rq 46 (i) $\forall z,\ |z| > R,\ \sum a_n z^n$ diverge

(ii) $\forall z,\ |z| < R,\ \sum a_n z^n$ converge absolument

Ex 47 • La série entière $\sum_{n\geq 0} z^n$ a un rayon de convergence de 1 et pour $|z|<1$, $\sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$

• La série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini et $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} = e^z$

Th 48 (Abel) Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ série entière de rayon de convergence ≥ 1 telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série sur le disque unité. On fixe $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et on pose

$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0,\ \theta \in [-\theta_0, \theta_0],\ z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$

Alors $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Th 49 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, R son rayon de convergence et f sa somme, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Th 50 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, f sa somme. Supposons qu'il existe (z_p) suite telle que $f(z_p) = 0\ \forall p \in \mathbb{N}$ et $z_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$ Alors $a_n = 0\ \forall n \geq 0$.

Th 51 Soit f une fonction holomorphe sur U ouvert de $\mathbb{C}$

$\forall z_0 \in U$, $\forall R > 0$ telque $D := D(z_0, R) \subset U$, f est developpable en série entière sur D

et $\forall z \in D$, $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n$ avec $a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}}\, dw$

Appli 52 (Théorème de Liouville)

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe et bornée, alors f est constante

Th 53 (Étude de l'espace de Bergman)

Soit $\mathbb{D} = D(0,1)$, $B^2(\mathbb{D}) = \{f \text{ holomorphe sur } \mathbb{D} \text{ telque } \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 < +\infty\}$ muni du produit scalaire de $L^2(\mathbb{D})$

(i) $B^2(\mathbb{D})$ est un Espace de Hilbert

(ii) $\left(e_n : \begin{array}{l} \mathbb{D} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n \end{array}\right)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de $B^2(\mathbb{D})$

(iii) $\forall F \in B^2(\mathbb{D}),\ \forall \xi \in \mathbb{D},\ F(\xi) = \int_{\mathbb{D}} \frac{F(z)}{\pi(1 - \xi \bar{z})^2}\, dx\, dy$

DVP ②

III - Interversion Intégrale-Intégrale

1 - Théorèmes de Fubini

Dans cette partie, $(X, \mathcal{S}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{T}, \lambda)$ sont 2 espaces mesurés σ-finis et f est une fonction sur $X \times Y$ mesurable relativement à la tribu produit $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$

Th 54 (Fubini - Tonelli) On suppose f à valeurs positives

Alors (i) $x \mapsto \int_Y f(x,y)\, \lambda(dy)$ et $y \mapsto \int_X f(x,y)\, \mu(dx)$ sont mesurables

(ii) $\int_X \left(\int_Y f(x,y)\, \lambda(dy) \right) \mu(dx) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, \mu(dx) \right) \lambda(dy) = \int_{X\times Y} f\, d(\mu \otimes \lambda)$

Ex 55 X variable aléatoire positive, $\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)\, dt$

Th 56 (Fubini)

(i) Si $\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\, \lambda(dy) \right) \mu(dx) < +\infty$ Alors $f \in L^1(X \times Y)$

(ii) Si $f \in L^1(X \times Y)$ alors $x \mapsto f(x,y) \in L^1(X)$ p.p. y et $y \mapsto f(x,y) \in L^1(Y)$ p.p. x

$x \mapsto \int_Y f(x,y)\, \lambda(dy) \in L^1(X)$ et $y \mapsto \int_X f(x,y)\, \mu(dx) \in L^1(Y)$

et $\int_X \left(\int_Y f(x,y)\, \lambda(dy) \right) \mu(dx) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, \mu(dx) \right) \lambda(dy) = \int_{X\times Y} f\, d(\mu \otimes \lambda)$

Appli 57 (Intégration par parties)

$f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x f(t)\, dt$, $G : x \mapsto \int_0^x g(t)\, dt$

Alors $\int_0^x f(t) G(t)\, dt = F(x) G(x) - \int_0^x F(t) g(t)\, dt$

2 - Application ~~aux~~ série doubles

Th 58 (Fubini - Tonelli pour les séries doubles)

$(u_{p,q})_{p,q \in \mathbb{N}}$ série double, (i) $\sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{q=0}^{\infty} |u_{p,q}| \right) = \sum_{q=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{\infty} |u_{p,q}| \right)$

(ii) Si ces sommes précédentes sont finies, $\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}$

C-Ex 59 $u_{p,q} = 1\, \mathbb{1}_{p=q} - \frac{1}{2^{p-q}} \mathbb{1}_{q<p}$

$\sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} \right) = 2 \neq 0 = \sum_{q=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q} \right)$

Ex 60 $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$, $\sum_{k=2}^{+\infty} (\zeta(k) - 1) = 1$

Appli 61 $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partition de $[\![1, n]\!]$ avec par convention $B_0 = 1$

Alors $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$