235

Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On note $\mathcal{L}^p_\mu(\mathbb{K})$ l'espace des fonctions f $\mathcal{A}$-mesurables à valeur dans $\mathbb{K}$ telles que $\int_X |f|^p d\mu < +\infty$.

I. Interversion limite-limite

Définition 1 Dans cette partie (Y, d) est un espace métrique. Soit (f_n) une suite dans $\mathcal{F}(X,Y)$ et $f \in \mathcal{F}(X,Y)$. On dit que (f_n) converge uniformément (CVU) vers f, si $\sup_X d(f_n(x), f(x)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Proposition 2 Supposons X topologique. Soit $A \subset X$, $a \in \bar{A}$ et (f_n) une suite dans $\mathcal{F}(A,Y)$ qui CVU vers $f \in \mathcal{F}(A,Y)$. On suppose que : $(\forall n \geq 0, \exists b_n \in Y \mid f_n(x) \xrightarrow[x \in A]{x \to a} b_n)$ et que $(\lim_n b_n = b \in Y)$. Alors $f(x) \xrightarrow[x\in A]{x \to a} b$.

Contre-exemple 3 : $f_n(x) := \frac{x}{x+n}$. $\lim_n \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ (Il n'y a pas CVU)

Proposition 4 Soit (f_n) une suite de $C^0(X,Y)$ qui CVU vers f. Alors $f \in C^0(X,Y)$

Contre-exemple 5 Ce n'est pas vrai sans CVU. $f_n(x) = x^n \mathbb{1}_{[0,1]}$ converge simplement vers δ_1.

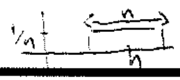
Proposition 6 Soient $a < b \in \mathbb{R}$, $(E, \|\cdot\|)$ un Banach et (f_n) une suite de $C^1((a,b), E)$. Si
- il existe $x_0 \in (a,b)$ tel que $(f_n(x_0))$ converge dans E
- (f_n') CVU ~~dans~~ et on note g sa limite

Alors f_n CVU vers une fonction $f \in C^1((a,b),E)$ et $f' = g$.

Contre-exemple 7 : Ce n'est pas vrai sans CVU. On prend $f_n : x \in [-1,1] \mapsto \sqrt{x^2 + 1/n}$. f_n est C^1 et (f_n) CVU vers $|\cdot|$.

Proposition 8 Si $\mu(X) < +\infty$ et (f_n) une suite de $\mathcal{L}^1_\mu(\mathbb{K})$ qui CVU vers f. Alors $f \in \mathcal{L}^1_\mu(\mathbb{K})$ et $\lim_n \int_X f_n = \int_X \lim_n f_n = \int_X f$

Contre-exemple 9 Si $X = \mathbb{R}$, alors $\lambda(X) = +\infty$. On prend $f_n = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[n/2, 3n/2]}$. f_n CVU vers 0 mais $\int_\mathbb{R} f_n = 1 \neq 0 = \int_\mathbb{R} \lim_n f_n$



Corollaire 10 : Avec les mêmes hypothèses qu'en (8), si la série $\sum f_n$ converge normalement vers une fonction f, alors $\sum f_n$ CVU vers f, $f \in \mathcal{L}^1_\mu(\mathbb{K})$ et $\int_X \sum f_n = \sum \int_X f_n$.

Théorème 11 (Abel) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1 et telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de la série entière sur D_1. Soit $\theta_0 \in [0, \pi/2[$, on pose $\Delta_{\theta_0} := \{ z \in D_1 \mid \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta} \}$

Alors $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_1^\infty a_n$

II. Interversion limite-intégrale

On note $\mathcal{M}^+(\mathcal{A}) := \{ f : (X, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}_+}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}_+})), \text{ mesurables} \}$

Théorème 12 (Beppo Levy) Si (f_n) est une suite croissante dans $\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, alors $\lim_n f_n \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ et $\int_X \lim f_n \, d\mu = \lim \int_X f_n \, d\mu$.

Application (Minkowski généralisé) 13 : Soit (f_n) une suite dans $\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, alors $(\forall p \geq 1, \|\sum_{n\geq1} f_n\|_p \leq \sum_{n\geq1} \|f_n\|_p \leq \infty)$

Théorème 14 Soit (φ_n) une suite de fonctions $\mathcal{A}$-mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

(a) Si $\varphi_n \in \mathcal{M}^+(\mathcal{B})$, $\forall n \geq 1$, alors $\int_X \sum \varphi_n \, d\mu = \sum \int_X \varphi_n \, d\mu$

(b) Si $\sum \int_X |\varphi_n| < +\infty$, alors les fonctions φ_n, $\sum |\varphi_n|$ et $\sum \varphi_n$ sont dans $\mathcal{L}^1_\mu(\mathbb{K})$. En outre $\int_X \sum \varphi_n = \sum \int_X \varphi_n$

Application 15 (Borel Cantelli) Soit $(A_n) \in \mathcal{A}^\mathbb{N}$. Alors $\sum \mu(A_n) < +\infty \Rightarrow \mu(\limsup A_n) = 0$.

Théorème 16 (Fatou) : Soit (f_n) une suite de $\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Alors $0 \leq \int_X \liminf f_n \leq \liminf \int_X f_n \leq +\infty$.

Application 17 Soit $(f_n) \in \mathcal{L}^1_\mu(\mathbb{K})^\mathbb{N}$ qui converge simplement vers f et vérifiant $\sup_n \int_X |f_n| d\mu < +\infty$. Alors $f \in \mathcal{L}^1_\mu(\mathbb{K})$.

Développement 1

Théorème 18 (Riesz-Fisher) (a) $\forall p \in [1, +\infty[$, $(L^p_\mu(\mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$ est complet.

(b) Soit (f_n) une suite dans $\mathcal{L}^1_\mu(\mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{L}^1_\mu(\mathbb{K})$. Si $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f$, il existe une suite extraite $(f_{\varphi(n)})$ et $g \in \mathcal{L}^1_\mu(\mathbb{K})$ telle que $|f_{\varphi(n)}| \leq g$ μ-pp et $f_{\varphi(n)} \xrightarrow{\mu\text{-pp}} f$

Théorème 19 (convergence dominée - TCD) Soit $(f_n) \in \mathcal{L}^1_\mu(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$.
Si (i) $\mu(dx)$-pp $(f_n(x))$ converge dans $\mathbb{K}$
(ii) $\exists g \in \mathcal{L}^1_\mu(\mathbb{R}_+) \setminus \forall n \geq 1$ $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\mu(dx)$-pp
Alors, il existe $f \in \mathcal{L}^1_\mu(\mathbb{K})$ telle que
(i) f_n converge vers f $\mu(dx)$-pp
(ii) $\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$ (et même $\int |f_n - f| d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$)

Contre-exemple 20 : (Sans domination). On prend $f_n = \mathbb{1}_{[n-1/2, n+1/2]}$
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \to 0$, $\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n = 1 \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} \lim f_n$

Remarque 21 La proposition 7 se déduit du TCD.

Remarque 22 (TCD vs CVU) : $f_n(x) = x^n \in \mathcal{L}^1_\mu([0,1])$. Par le TCD, $\int_0^1 f_n \to 0$ or la proposition 7 ne permet pas de conclure.

Application 23 (Continuité de l'intégrale par rapport à la mesure) Soit $f \in \mathcal{L}^1_\mu(\mathbb{K})$. Alors
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu \leq \varepsilon$.

Exercice 24 (Calcul de l'intégrale de Gauss).
On pose $f_n(t) = (1 - \frac{t^2}{n})^n \mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}(t)$ pour $n \geq 1$.
a - Montrer que $f_n(t) \leq e^{-t^2}$ et calculer la limite de (f_n)
b - Exprimer $\int_0^\infty f_n$ en fonction de $w_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$
c - Calculer $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$ grâce à un équivalent de w_n.

III - Régularité sous l'intégrale

1 - Théorèmes fondamentaux

Dans ce qui suit, on se donne $f : E \times X \to \mathbb{K}$ où (E, d) est un espace métrique.

Proposition 25 (continuité) : Soit $u_\infty \in E$. Si
(i) pour tout $u \in E$, $f(u, \cdot)$ est mesurable
(ii) $\mu(dx)$-pp $f(\cdot, x)$ est continue en u_∞
(iii) $\exists g \in \mathcal{L}^1_\mu(\mathbb{R}_+) \setminus \forall u \in E$ $|f(u,x)| \leq g(x)$ $\mu(dx)$-pp
Alors $F : u \in E \mapsto \int_X f(u,x) \mu(dx)$ est définie et continue en u_∞

Contre-exemple 26 (sans domination) On prend
$f : (t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mapsto t e^{-t\omega}$. Alors $F(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

Application 27 $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soient $f \in \mathcal{L}^1_\mu(\mathbb{K})$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Alors $F : u \in \mathbb{R} \mapsto \int_a^u f(t) dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 28 (Dérivation) : On suppose ici $E = I$ un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Soit $u_\infty \in I$. Si
(i) pour tout $u \in I$, $f(u, \cdot) \in \mathcal{L}^1_\mu(\mathbb{K})$
(ii) $\mu(dx)$-pp $\frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x)$ existe
(iii) $\exists g \in \mathcal{L}^1_\mu(\mathbb{R}_+) \setminus \forall u \in I$, $|f(u,x) - f(u_\infty, x)| \leq g(x) |u - u_\infty|$ $\mu(dx)$-pp
alors $F : u \in I \mapsto \int_X f(u,x) dx$ est dérivable en u_∞ de dérivée $F'(u_\infty) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x) \mu(dx)$.

Contre-exemple 29 (sans domination) $f(u,t) = u^2 e^{-t|u|}$
$F(u) = \int_0^\infty f(u,t) dt = |u|$ non dérivable en 0.

Corollaire 30 Si (i) $f(\cdot, x)$ est $\mathcal{C}^k$ $\mu(dx)$-pp
(ii) $f(u, \cdot) \in \mathcal{L}^1_\mu(\mathbb{K})$ $\forall u \in E$
(iii) $\forall 0 \leq j \leq k$, $\exists \varphi_j \in \mathcal{L}^1_\mu(\mathbb{R}_+)$, $(\forall u \in E, |\frac{\partial^j}{\partial u^j} f(u, \cdot)| \leq \varphi_j)$
Alors F est $\mathcal{C}^k$ sur E et $F^{(j)}(u) = \int_X \frac{\partial^j}{\partial u^j} f(u,x) dx$

Application 31 Proposition : Soit $f \in \mathcal{L}^1_\mu(\mathbb{K})$.
Si $f = O_\infty(x^{-n})$ avec $n \geq 2$, alors $\hat{f} \in \mathcal{C}^{n-2}(\mathbb{R})$
Si $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ et $\forall k \leq n$, $f^{(k)} \in \mathcal{L}^1_\mu(\mathbb{K})$, alors $\hat{f} = O(x^{-n})$
On dit que la transformée de Fourier échange régularité et décroissance à l'infini.

Application 32 Soit X une Variable Aléatoire Réelle (VAR). Alors si $E(|X|^n) < \infty$, φ_X est n-fois dérivable et $\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \int_\Omega x^k e^{itx} dP_X$

Proposition 33 (Holomorphie sous l'intégrale). $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et E ouvert de $\mathbb{C}$
Si (i) $\forall z \in E$, $f(z, \cdot)$ est mesurable
(ii) $f(\cdot, x)$ est holomorphe sur E $\mu(dx)$-pp

(ii) il existe $\varphi \in \mathcal{L}^1_\mu(\mathbb{C}) \mid \forall z \in E, |f(z,x)| \leq \varphi(x)$ $\mu(dx)$-pp
Alors $F : z \in E \mapsto \int_X f(z,x)\mu(dx)$ est holomorphe sur E et $\forall z \in E$, $\frac{\partial f}{\partial z}(z,\cdot) \in \mathcal{L}^1_\mu(\mathbb{C})$, $F'(z) = \int \frac{\partial f}{\partial z}(z,x)\,d\mu(x)$.

Application 34 $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,dt$ est holomorphe sur $\{Re(z)>1\}$

2- Application à la convolution

Proposition 35 si $f \in \mathcal{C}^k_c(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, alors $f*g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$ et $\partial^i(f*g) = (\partial^i f)*g$ $\forall\, 0 \leq i \leq k$

Corollaire 36 : si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ alors $f*g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$

Définition 37 Une suite dans $\mathcal{L}^1_{\lambda_d}(\mathbb{K})$ est une approximation de l'unité si (i) pour tout $n \geq 1$, $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n = 1$

(ii) $\alpha_n \geq 0$ et supp $\alpha_n \subset B(0, r_n)$ avec $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Proposition 38 : Soit (α_n) une approximation de l'unité et $f \in L^p_{\lambda}(\mathbb{K})$ $(p \geq 1)$. Alors $\forall n \geq 1$, $f*\alpha_n \in L^p_{\lambda_d}(\mathbb{K})$ et $f*\alpha_n \xrightarrow{\|\,\|_p} f$

Théorème 39 : $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p_\lambda(\mathbb{K})$ $\forall$ $p \in [1, +\infty[$

IV. Interversion intégrale intégrale

Définition 40 : Dans cette partie $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ sont deux espaces mesurés σ-finis. On appelle tribu produit de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B} := \sigma(\{A\times B \;\; A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\})$

Définition-proposition 41 (a) il existe une unique mesure sur $(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ vérifiant : $\forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}$ $m(A\times B) = \mu(A)\nu(B)$
C'est une mesure σ-finie, notée $\mu\otimes\nu$

(b) Pour tout $C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, $m(C) = \int_X \nu(C_x)\mu(dx) = \int_Y \mu(C^y)\nu(dy)$

Théorème 42 (Fubini-Tonelli) Soient $f : (X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$
(a) $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mu(dx)$ sont mesurables

(b) $\int_{X\times Y} f\,d\mu\otimes\nu = \int_X\left(\int_Y f(x,y)\,\nu(dy)\right)\mu(dx) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\,\mu(dx)\right)\nu(dy)$

Application 43 : si X est une VAR positive, $E(X) = \int_{\mathbb{R}^+} \mathbb{P}(X>t)\,dt$

Théorème 44 (Fubini) Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mu\otimes\nu}(\mathbb{K})$ Alors
(a) $\mu(dx)$-pp, $f(x,\cdot) \in \mathcal{L}^1_\nu(\mathbb{K})$ et $\nu(dy)$-pp $f(\cdot,y) \in \mathcal{L}^1_\mu(\mathbb{K})$
(b) $x \mapsto \int_Y f(x,y)\nu(dy) \in \mathcal{L}^1_\mu(\mathbb{K})$ et $y \mapsto \int_X f(x,y)\mu(dx) \in \mathcal{L}^1_\nu(\mathbb{K})$
(c) $\int_{X\times Y} f\,d\mu\otimes\nu = \int_X\left(\int_Y f(x,y)\,\nu(dy)\right)\mu(dx) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\mu(dx)\right)\nu(dy)$

Contre-exemple 45 $f(x,y) = 2e^{-2xy} - e^{-xy}$ définie sur $\mathbb{R}_+\times[0,1]$. $\int_{\mathbb{R}}\int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx$

Proposition 46 : Soient $f, g \in \mathcal{L}^1_{\lambda_d}(\mathbb{C})$, alors $\widehat{f*g} = \hat{f} * \hat{g}$

Proposition 47 $\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-x^2-y^2}\,d(x,y) = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\right)^2$
Par changement de coordonnées polaire on a $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx$.

Proposition 48 : Soit $(a_{n,m})$ une suite de complexes. Si $\sum_n\sum_m |a_{n,m}| < \infty$ alors $\sum_n\sum_m a_{n,m} = \sum_m\sum_n a_{n,m}$.

Proposition 49 : La transformée de Fourier stabilise $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d),\ \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha f(x)| < \infty, \forall \alpha \in \mathbb{N}^d\}$.

Proposition 50 : Developpement 2

$$F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$
$$f \longmapsto \hat{f}$$
définit un isomorphisme

et $F^{-1} g(y) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} g(y) e^{i\langle x,y\rangle}\,dx$

(on admettra que pour $f_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$, $\hat{f}_a(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}a^2x^2\right)$)

Références : Marc Briane Gilles Pagès, Théorie de l'intégration
Barbe - Ledoux, Probabilité.