236

ILLUSTRER PAR DES EXEMPLES QUELQUES METHODES DE CALCULS D'INTEGRALES DE FONCTIONS D'UNE OU PLUSIEURS VAR. REELLES

(I) METHODES ELEMENTAIRES

* Primitives

1 → primitives usuelles ([GOU], p.133)

Ex : $\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan(x)]_a^b$, $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos(x)$

2 → fractions rationnelles ([GOU], p.133)

décomposition en éléments simples pour se ramener à $\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx$ et $\int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}\,dx$ avec $c^2-4d<0$

Ex : $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \int \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$
$= \ln(|x|) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}$

3 → fonctions en sinus et cosinus ([GOU], p.135)

utilisation de $\cos^2+\sin^2=1$, linéarisation

Ex : $\int \cos^4(x)\sin^4(x)\,dx = \int \cos^4(x)(1-\cos^2(x))^2\,dx$
$= \int \cos^4(x) - 2\cos^6(x) + \cos^8(x)\,dx$

puis $\cos^4(x) = \frac{1}{16}(e^{ix}+e^{-ix})^4 = \frac{\cos(4x)}{8} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{3}{8}$

* Intégration par parties (IPP)

Formule : $\boxed{\int uv' = [uv] - \int u'v}$

1 → $\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt = [-t^n e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} n t^{n-1} e^{-t}\,dt = n\Gamma(n)$

2 → $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$

* Changement de variables ([GOU], p.334)

1 → pour fonction d'une variable

$\boxed{\varphi\ C^1\text{-difféo},\ \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du}$

Ex : $\int \cos^4(x)\sin^5(x)\,dx = \int \cos^4(x)(1-\cos^2(x))^2\sin(x)\,dx$
$= -\int t^4(1-t^2)^2\,dt$ via $t=\cos(x)$

* Règles de Bioche pour $\int R(\cos(x),\sin(x))\,dx = I$ avec R rationnelle

Si I est inchangée par $x \to \pi - x$, on pose $t = \sin(x)$
$-x$, ——— $\cos(x)$
$\pi + x$ ——— $\tan(x)$

Ex : $\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx \xrightarrow[t=\cos(x)]{} -\int \frac{1-t^2}{1+t^2}\,dt = t - 2\arctan(t)$
$\cos(x) - 2\arctan(\cos(x)) \longleftarrow$

2 → pour fonction de plusieurs variables

$\boxed{\varphi : U \to \mathbb{R}^n\ C^1\text{-difféo},\ V=\varphi(U),\quad \int_V f(v)\,dv = \int_U f(\varphi(u))\,|J\varphi(u)|\,du \ \text{ où } J\varphi(u) = \det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(u)\right)_{1\le i,j\le n}}$

* Coordonnées polaires : $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\,r\,dr\,d\theta$

où Δ représente D en coordonnées polaires

* Coordonnées cylindriques/sphériques :

$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\Delta_1} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)\,r\,dr\,d\theta\,dz$
$= \iiint_{\Delta_2} f(r\cos(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\,r^2\cos(\varphi)\,dr\,d\theta\,d\varphi$

* Fubini ([GOU], p.333)

Sous certaines conditions, $\boxed{\iint f(x,y)\,dx\,dy = \int\left(\int f(x,y)\,dx\right)dy}$
c'est notamment vrai sur $P\times Q$ avec P, Q pavés compacts

Ex : Intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

$a>0$, $D_a = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le a\}$, $C_a = [-a,a]^2$

$I_a = \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \pi(1-e^{-a^2})$
$J_a = \iint_{C_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx\right)^2$

$I_a \le J_a \le I_{\sqrt{2}a}$ puis $a \to +\infty$

DL 1 : Intégrale de Fresnel $\int_0^{+\infty} e^{ix^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calculs d'...

(II) ANALYSE COMPLEXE

* Prolongement analytique ([ZQ], p. 291, 322)

Ex: Transformée de Fourier de $f : x \mapsto e^{-x^2}$

on pose $F : z \in \mathbb{C} \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{zx} e^{-x^2} dx$. Sur $\mathbb{R}$, F coïncide avec $G : z \in \mathbb{C} \mapsto \sqrt{\pi}\, e^{z^2/4}$ + holomorphes : $\hat{f}(t) = F(-it) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{t^2}{4}}$

* Théorème des résidus ([CAR], p. 93)

1 → Rappels

f holomorphe sur $U \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, U ouvert de $\mathbb{C}$
γ chemin continu fermé dans $U \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$

$\forall p \notin Im(\gamma)$, $I_\gamma(p) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-p}$

$\forall j \in [\![1, n]\!]$, $Res(f, a_j) = b_{-1}$ où $\sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n z^n$ est le développement en série de Laurent de f autour de a_j

$$\boxed{\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{n} I_\gamma(a_j)\, Res(f, a_j)}$$

2 → Utilisation

Ex: $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin(t)} dt$, $a > 1$

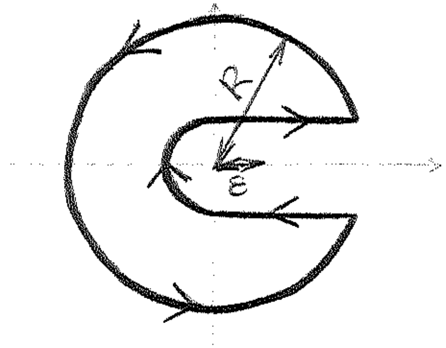
$I = \int_{\mathcal{C}(0,1)} f(z)\, dz$ avec $f : z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{2}{z^2 + 2iaz - 1}$

$I = 2i\pi . Res(f, i(\sqrt{a^2-1} - a)) = 2i\pi . \frac{1}{i\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$

Ex: Formule des compléments

$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ via $I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$ $\forall \alpha \in]0, 1[$

$K_{\varepsilon, R}$



(III) METHODES ALTERNATIVES

* Intégrales à paramètre

introduire un paramètre afin d'utiliser les propriétés de régularité des intégrales à paramètre notamment la dérivabilité

Ex: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} (e^{-tx} - e^{-x})\, dx$ ([ZQ], p. 342)

$F : t \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} (e^{-tx} - e^{-x})\, dx$ est C^1 sur $]0, +\infty[$ et $F'(t) = -\frac{1}{t}$; $F(t) = \ln(t)$.

* Suites et séries de fonctions

Ex: $\sum_{n \geq 1} e^{-nx} x^2$ converge normalement vers $f : x \mapsto \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \cdot x^2$ donc $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = 2 . \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$

* Fourier-Plancherel

permet d'étendre la transformée de Fourier à L^2. De plus il s'agit d'une isométrie de $(L^2, \|\cdot\|_2)$.

Ex: $I = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha y} \left(\frac{\sin(y)}{y}\right)^2 dy$

$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^+$, $\hat{f}(y) = \left(\frac{\sin(y)}{y}\right)^2$, $\hat{g}(y) = e^{-\alpha y} \mathbb{1}_{y>0}$

$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(y) \hat{f}(y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) f(y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\hat{g}}(y) f(-y)\, dy$

DL 2 : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+2\cos(x))}{\cos(x)}\,dx = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\operatorname{argch}(2)^2}{2}$

IV CALCUL APPROCHE D'INTEGRALES

* Méthode des rectangles

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k = b$

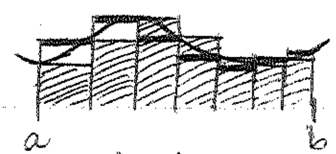
1 $\longrightarrow$ Rectangles à gauche

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=1}^{k-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) f(\alpha_i)$$

2 $\longrightarrow$ Rectangles à droite

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=1}^{k-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) f(\alpha_{i+1})$$

motivation : Chasles : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\,dx$



* Méthode de quadrature de Gauss ([ROM], p338)

on cherche $(\lambda_{n,k})$, $(x_{n,k})$ tq $\forall n \geq 1$, $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$

$$\int_a^b P(x)\pi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} P(x_{n,k})$$

$n \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda_{n,k})_{1 \leq k \leq n}$ existe ssi $(x_{n,k})_{1 \leq k \leq n}$ sont les racines de P_n où $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ polynômes orthogonaux associés à π. On a de plus unicité.

$$|E_n(f)| = \left| \int f\pi - \sum \lambda_{n,k} f(x_{n,k}) \right| \leq \frac{\|f^{(2n)}\|_\infty}{(2n)!\,(\alpha_n^{(n)})^2}$$

$\alpha_n^{(n)}$ coeff dominant de P_n.

* Monte-Carlo ([PT], p.78)

$I = \int g(x) f(x)\,dx$ avec $\int f(x)\,dx = 1$ vu comme $E(g(Y))$ avec Y variable aléatoire de densité f.

I approchée par $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(Y_i)$, $(Y_1, \dots, Y_n)$ iid $\sim Y$

motivation : si $Y \in L^2$, $\displaystyle\frac{\sqrt{n}}{\Sigma_n}\left(\frac{S_n}{n} - E(g(Y))\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)$

avec $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} g(Y_i)$

$$\Sigma_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(g(Y_i) - \frac{S_n}{n}\right)^2 \text{ estimateur de } V(g(Y))$$

Ex : $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\mathbb{P}(|X| \leq 1{,}96) \simeq 0{,}95$

pour n assez grand, on estime alors que

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - E(g(Y)) \right| \leq \frac{1{,}96\,\Sigma_n}{\sqrt{n}} \right) \simeq 0{,}95$$

[GOU] = GOURDON, Analyse

[ZQ] = Zuily - Queffelec, Elem^ts d'analyse pour l'agreg

[CAR] = CARTAN

[PT] = PAUL S.TOULOUSE, Thèmes de proba et stat

[ROM] = ROMBALDI