LEÇON 215 - APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES SUR UN OUVERT DE $\mathbb{R}^n$ EXEMPLES ET APPLICATIONS

$\mathcal{U}$ ouvert de E : Rev de dim $n<+\infty$. F Rev de dim $<\infty$.

I) Définitions et premières propriété. Accroissement finis

1- Généralités. [GOU]

Déf 1 : $f : \mathcal{U} \to F$ différentiable en $a \in \mathcal{U}$ si $\exists \ell \in \mathcal{L}(E,F)$
$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o(\|h\|).$$

Notation : $\ell(h) = df(a).h$.

Remarque : En dim $<+\infty$, linéaire $\Rightarrow$ continue.

Exemple : Si $E = F = \mathbb{R}$, $df(a).h = f'(a)h$.

Proposition 1 : (Propriétés de la différentielle)

1- Si $f : \mathcal{U} \to F$ différentiable en a, alors f continue en a.

2- $f, g : \mathcal{U} \to F$ différentiables en $a \in \mathcal{U}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. alors $f+g$ et λf sont différentiables en a et :
$$d(f+g)(a) = df(a) + dg(a) \text{ et } d(\lambda f)(a) = \lambda df(a)$$

3- V ouvert de $\mathbb{R}^m$ $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$, $g : V \to F$ tels que $f(\mathcal{U}) \subset V$. Si f différentiable en a et g différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ et différentiable en a et :
$$d(g\circ f)(a) = dg(f(a)).df(a).$$

4- $f : \mathcal{U} \to F$ bijection de $\mathcal{U} \to f(\mathcal{U})$. Si f est différentiable en a, et si f^{-1} différentiable en $f(a)$, alors $df(a) \in \mathrm{Isom}(E;F)$ et
$$d(f^{-1})(f(a)) = df(a)^{-1}.$$

Déf 2 : $f : \mathcal{U} \to F$ différentiable en $a \in \mathcal{U}$ selon la direction $h \in \mathcal{U}$ si $t \mapsto f(a+th)$ dérivable en 0. Sa dérivée en 0 sera appelée dérivée directionnelle en a selon h et sera notée $\partial_h f(a)$.

Proposition 2 : Si f différentiable en $a \in \mathcal{U}$, alors les dérivées directionnelles selons toutes les directions existent et $\forall h \in \mathcal{U}$, on a $df(a).h = \partial_h f(a) \in F$.

Remarque : Réciproque fausse : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{y^2}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0,y) = y$.

Définition 3 : $f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R} \to F$, $(e_1, \dots, e_n)$ base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si $\exists i \in [\![1,n]\!]$ / f est différentiable en $a \in \mathcal{U}$ selon e_i, on dit que f admet une dérivée partielle en a d'indice i et on a :
$$\partial_{e_i} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Remarque : (dx_i) base duale de $(e_1, \dots, e_n)$ dans $(\mathbb{R}^n)^*$.
Si $f : \mathcal{U} \to F$ différentiable en $a \in \mathcal{U}$,
$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i.$$
Si de plus $f = (f_1, \dots, f_m)$ dans une base de F,
$$J(a) = \mathrm{Mat}(df(a)) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

Définition 4 : On considère $(\mathbb{R}^n, \langle .,. \rangle)$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une application différentiable en $a \in \mathcal{U}$. $df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$ et il existe un unique vecteur $\nabla f(a) \in \mathbb{R}^n$ tel que
$$df(a).h = \langle \nabla f(a), h \rangle, \ \forall h \in \mathbb{R}^n.$$
$\rightsquigarrow$ gradient de f en a.

Remarque : $\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i$.

2- Inégalités des accroissements finis.

Théorème 1 : $f : \mathcal{U} \to F$, $[a,b] \subset \mathcal{U}$ et $k \geq 0$. Si :
- f différentiable sur $\mathcal{U}$.
- $\forall x \in [a,b]$ $\|df(x)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq k$

Alors on a :
$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq k \|b-a\|_E$$

Définition 4 : f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ si elle est différentiable sur tout $\mathcal{U}$ et si $\begin{array}{l} \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{L}(E,F) \\ a \longrightarrow df(a) \end{array}$ est continue.

Corollaire (Caractérisation des applications $\mathcal{C}^1$) $f : \mathcal{U} \to F$

(1) f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.

$\Leftrightarrow$ (2) f admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$ continues sur $\mathcal{U}$.

II.) Inversion locale. Applications. [CAR]

Définition 5: W ouvert de F et $f : \mathcal{U} \to W$. f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme ssi

- f est bijective et $\mathcal{C}^1$
- $g = f^{-1} : W \to \mathcal{U}$ est $\mathcal{C}^1$.

Exemple: $x \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ homéomorphisme $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mais pas un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.

Proposition 3: $f : \mathcal{U} \to W$ homéomorphisme $\mathcal{C}^1$.

f $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme $\Leftrightarrow \forall a \in \mathcal{U}$, $df(a) \in \mathrm{Isom}(E;F)$.

Exemple: $x \mapsto x^3$, $df(x) = [h \mapsto 3x^2 h]$.

$x = 0 \Rightarrow df(x)$ pas isomorphisme.

$\Rightarrow f$ pas $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.

Théorème 2: (Inversion locale)

Soit $f : \mathcal{U} \to F$ $\mathcal{C}^1$. Si $\exists a \in \mathcal{U}$ tel que $df(a) \in \mathrm{Isom}(E,F)$, alors $\exists V$ ouvert, voisinnage de a inclus dans $\mathcal{U}$ et un W voisinnage ouvert de $b = f(a)$, inclus dans F tels que:

$$f \ \mathcal{C}^1 \text{ difféomorphisme } V \to W.$$

Remarque: $[df(a) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n;F)] \Leftrightarrow [\det J(a) \neq 0,\ \dim F = n]$.

Application: Racine k-ième d'une matrice: [O-A]

L'existence de B tel que $B^k = A$ pour A "proche" de Id.

Remarque: Deux applications majeures: Inversion globale et Théorème des fonctions implicites.

Théorème 3: (de l'inversion globale)

Si $f : E \to F$ injective et $\mathcal{C}^1$, alors

$$[\forall a \in \mathcal{U},\ df(a) \text{ inversible et bicontinue}] \Leftrightarrow \begin{cases} V = f(\mathcal{U}) \text{ ouvert de } F \\ f^{-1} : V \to \mathcal{U} \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \end{cases}$$

Application: Théorème de Brouwer $\boxed{\text{DEV}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et B la boule unité de $\mathbb{R}^n$ pour une norme quelconque. $[f : B \to B \text{ continue}] \Rightarrow f$ admet un point fixe.

Théorème 4: (des fonctions implicites) E, F, G 3 Rev de dimension finie. $\mathcal{U}$ ouvert de $E \times F$ et $f : \mathcal{U} \to G$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ $\mathcal{C}^1$.

Si il existe $(a,b) \in \mathcal{U}$ tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \in \mathcal{L}(F,G)$ isomorphisme de $F \to G$, alors:

- $\exists V \subset \mathcal{U}$ voisinnage ouvert de $E \times F$ contenant (a,b)
- $\exists W \subset E$ voisinnage ouvert de a
- $\exists g : W \to F$ $\mathcal{C}^1$ tels que:

$$[(x,y) \in V \ / \ f(x,y) = 0] \Leftrightarrow [x \in W \ / \ y = g(x)]$$

Application: si x_0 racine simple de $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors x_0 dépend localement et de manière $\mathcal{C}^\infty$ de P. [O-A]

III.) Dérivées d'ordre supérieur, Lemme de Morse [GOU]

Définition 6: $f : \mathcal{U} \to F$ deux fois différentiable ssi

- f différentiable sur $\mathcal{U}$
- $df : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(E,F)$ est différentiable en tout $a \in \mathcal{U}$.

On note alors $d^2f(a)$ la différentielle de df en a.

$$d^2f(a) \in \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E,F)).$$

Remarque: $d^2f : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E,F)) \cong \mathcal{L}(E \times E, F) =: \mathcal{L}_2(E,F)$.

Définition 7: f $\mathcal{C}^2$ ssi $\begin{cases} f \text{ deux fois différentiable} \\ d^2f : \mathcal{U} \to \mathcal{L}_2(E,F) \text{ continue.} \end{cases}$

Théorème 5: $f : \mathcal{U} \to F$ deux fois différentiable en $a \in \mathcal{U}$. Alors $d^2f(a)$ est une appli bilinéaire symétrique [CAR]

Définition 8: f $\mathcal{C}^k$ ssi $\begin{cases} f \text{ est } k \text{ fois différentiable} \\ d^kf : \mathcal{U} \to \mathcal{L}_k(E,F) \text{ continue.} \end{cases}$

$(e_1, \dots, e_n)$ base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si f est 2 fois différentiable en a, $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathcal{U} \to F$ est différentiable en a et $\forall i = 1..n$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a) = \lim_{t \to 0, t \neq 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a + te_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)}{t}$

Théorème 6: (de Schwarz) $f : \mathcal{U} \to F$ 2 fois dérivable. [CAR] [O-A]

$$\forall a \in \mathcal{U}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

Remarque: Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, en notant $H(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice hessienne de f en a, on a
$d^2f(a)(h,k) = d^2f(a)(k,h) = {}^t h\, H(a)\, k, \quad \forall h,k \in \mathbb{R}^n$.

Théorème 7: (formule de Taylor avec reste intégral) [CAR]
$f : \mathcal{U} \to F$ de classe $\mathcal{C}^n$. Si $[a, a+h] \subset \mathcal{U}$, alors
$$f(a+h) = f(a) + f'(a) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).h^n + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+th).h^{n+1}\, dt$$

Application: LEMME DE MORSE
Si $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^3$. Si $d^2f(0)$ est une forme quadratique non dégénérée de signature $(p, n-p)$ alors il existe un difféomorphisme $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ entre deux voisinages de 0 tel que $\varphi(0) = 0$ et
$$f(x) - f(0) = \varphi_1(x) + \dots + \varphi_p(x) - \varphi_{p+1}(x) - \dots - \varphi_n(x).$$

Application: une condition suffisante de minimalité (cf partie suivante). [O-A]

IV) Optimisation [O-A]

Cadre: Soient C une partie de E et $f : E \to \mathbb{R}$.
But: minimiser f sous la contrainte $x \in C$ i.e. trouver $\inf\{f(x), x \in C\}$.

Lemme: (condition nécessaire de minimalité locale du premier ordre). Soient C un ouvert de E et $f : C \to \mathbb{R}$. Si x^* est un minimum local de f, et si f est différentiable en x^*, alors $df(x^*) = 0$.

Exemple: $f : x \mapsto x^3$ dans $\mathbb{R}$. $f'(0) = 0$ mais n'est pas un minimum local de f.

Lemme: (condition de minimalité locale du second ordre)
Soient C un ouvert de E, $x^* \in E$ et $f : C \to \mathbb{R}$ 2 fois différentiable en x^*. Si $df(x^*) = 0$ alors:
- Si x^* est un minimum local de f, la forme $d^2f(x^*)$ est positive (nécessaire).
- Si $d^2f(x^*)$ est définie positive, x^* est un minimum local strict de f (suffisante)

Exemple: $f : (x,y) \mapsto x^2 - y^3$. $(0,0)$ vérifie 1 mais $H(0,0)$ n'est pas positive. $(0,0)$ n'est pas un minimum local.

Remarque: Si $f \in \mathcal{C}^3$, on retombe sous le cas du lemme de Morse.

Théorème 8: (des extremas liés) $\boxed{\text{DEV}}$ [GOU]
Soient $f, g_1, \dots, g_r \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. On considère
$$\Gamma = \{x \in \mathcal{U} \,/\, \forall i \in \{1, \dots, r\},\ g_i(x) = 0\}.$$
On suppose que:
- $f_{|\Gamma}$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$
- la famille $(dg_i(a))_{1 \leq i \leq r}$ est libre dans $(\mathbb{R}^n)^*$

Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, appelés multiplicateurs de Lagrange, tels que:
$$df(a) = \sum_{i=1}^r \lambda_i\, dg_i(a).$$

Application: diagonalisation des endomorphismes symétriques. Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Alors il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u.
[O-A] p. 21

Références :

[ROU] : F. ROUVIERE, petit guide de calcul différentiel.
[CAR] : H. CARTAN, Cours de Calcul différentiel.
[O-A] : BECK - MALICK - PEYRE - Objectif Agrégation
[GOU] · X. GOURDON. Les math en tête, Analyse