236

ILLUSTRER PAR DES EXEMPLES QUELQUES MÉTHODES DE CALCULS D'INTÉGRALES DE FONCTIONS D'UNE OU PLUSIEURS VARIABLE(S) RÉELLE(S)

I MÉTHODES ÉLÉMENTAIRES

1 Primitives

a Primitives usuelles ([GOU], p. 133)

Soit f continue et F une de ses primitives : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Ex 1 : $\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan x]_a^b$; $\int_a^b \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = [\arccos x]_a^b$.

b Fractions rationnelles ([GOU], p. 133)

Décomposition en éléments simples pour se ramener à $\int \frac{dx}{(x-a)^n}$ et à $\int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}\,dx$ (où $c^2 - 4d < 0$).

Ex 2 : $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}\right) dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2} + k$, $k \in \mathbb{R}$

c Polynômes en sinus et cosinus ([GOU], p. 135)

On veut calculer $\int \sin^n(x)\cos^m(x)\,dx$ où $m, n \in \mathbb{N}$.

Si m et n sont pairs : linéarisation ; sinon : changement de variable.

Ex 3 : $\int \cos^4(x)\sin^2(x)\,dx = \int \cos^4(x)(1-\cos^2(x))\,dx = \int \cos^4(x)\,dx - \int \cos^6(x)\,dx$

où $\cos^4(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}\left(\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2} + 4\,\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2} + 3\right)$

$= \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{8}$.

2 Intégration par parties

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

Ex 4 : Intégrales de Wallis : $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,dx = W_{n-2} - \frac{1}{n-1} W_n$.

Ex 5 : Fonction Gamma d'Euler : $\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} t^n e^{-t}\,dt = n!$

3 Changement de variable

Prop 6 : Si φ est un C^1-difféomorphisme, pour une variable,

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du$$

Ex 7 : Règles de Bioche pour fractions rationnelles en $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Étude des invariances de $R(\cos x, \sin x)\,dx$: ([GOU], p. 135)

- Si invariance $x \to -x$, on pose $t = \cos x$
- ——— $x \to \pi - x$, ——— $t = \sin x$
- ——— $x \to \pi + x$, ——— $t = \tan x$

Ex 8 : $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx \xrightarrow[t=\cos x]{} \int \frac{1-t^2}{1+t^2}(-dt) = t - 2\arctan t + k$

$\hookrightarrow \cos x - 2\arctan(\cos x) + k$, $k \in \mathbb{R}$

Prop 9 : Pour une fonction de plusieurs variables :

Si $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ C^1-difféomorphisme, $V = \varphi(U)$, $\int_V f(v)\,dv = \int_U f(\varphi(u))\,|J\varphi(u)|\,du$

où $J\varphi(u) = \det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(u)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$.

App 10 : Coordonnées cartésiennes $\leftrightarrow$ polaires

Si Δ représente D en coordonnées polaires :

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

App 11 : Volume de la boule euclidienne de $\mathbb{R}^d$ ([BP], p. 246)

- Si d est pair, $V_d = \frac{\pi^{d/2}}{(d/2)!}$
- Si d est impair, $V_d = \frac{2^d\,\pi^{(d-1)/2}\,(d-\frac{1}{2})!}{d!}$

Thm 12 : Fubini ([GOU], p. 333)

Sous certaines conditions $\iint f(x,y)\,dx\,dy = \int\left(\int f(x,y)\,dx\right)dy = \int\left(\int f(x,y)\,dy\right)dx$

(Ex par exemple sur $P \times Q$ où P et Q pavés compacts de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$.)

Ex 13 : Intégrale de Gauss : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

Pour $a > 0$, $D_a := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq a\}$ et $C_a := [-a, +a]^2$.

$I_a = \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \pi(1 - e^{-a^2})$

$J_a = \iint_{C_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx\right)^2$

$\Big\}$ $I_a \leq J_a \leq I_{\sqrt{2}a}$ puis $a \to +\infty$.

II MÉTHODES ALTERNATIVES

1 Pour des suites et séries de fonctions

Thm 14 : Convergence dominée ([GOU], p. 147)

Si $(f_n)_n$ continues par morceaux et dominées par φ, intégrable, continue par morceaux,

Et si (f_n) converge simplement vers f, continue par morceaux,

Alors les (f_n) et f sont intégrables et $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$.

App 15 : Continuité de la transformée de Fourier

Si $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$, alors $\hat{f}(y_n) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixy_n}\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixy}\,dx = \hat{f}(y)$

App 16 : Intégrale de Fresnel

$\int_0^{\infty} e^{ix^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{i\pi/4}$ | DÉVELOPPEMENT N° 1 ([GOU], p. 342)

Thm 17 :
Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ une série de fonctions intégrables, continues par morceaux.
Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement vers S continue par morceaux
Et si $\sum_{n\geq 0} \int_I |f_n|$ converge
Alors S est intégrable et $\int_I S = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n$.

Ex 18 : On a : $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} x^2 \, dx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, via $\sum_{n\geq 1} e^{-nx} x^2$.

2 Sommes de Riemann ([GOU], p. 124-125)

Déf 19 :
Soit f bornée sur $[a,b]$; $a = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_n = b$ une subdivision ;
$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\xi_i \in [\sigma_{i-1}, \sigma_i]$.
$S(f,\sigma,\xi) := \sum_{i=1}^{n} (\sigma_i - \sigma_{i-1}) f(\xi_i)$; pas de σ : $|\sigma| = \sup_{1\leq i\leq n} |\sigma_i - \sigma_{i-1}|$.

Thm 20 :
Soit f continue sur $[a,b]$.
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall \sigma$ subdivision de $[a,b]$, $\forall \xi$,
$$|\sigma| < \alpha \Rightarrow \left| \int_a^b f(x)\,dx - S(f,\sigma,\xi) \right| < \varepsilon.$$
En particulier, $\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Ex 21 : $I(\rho) := \int_0^{\pi} \ln(1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2)\,d\theta = \lim_{n\to\infty} u_n$, ([GOU], p. 179)
avec $u_n = \frac{\pi}{n} \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 - 2\rho\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \rho^2\right)\right)$ et où $\rho \in \mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$.

3 Régularité des intégrales à paramètre ([GOU], p. 157, 164)

Thm 22 :
Si $f(x,\cdot)$ est continue par morceaux,
Si $f(\cdot,t)$ est continue,
Et si $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$ avec φ intégrable continue par morceaux
Alors $x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$ est continue.

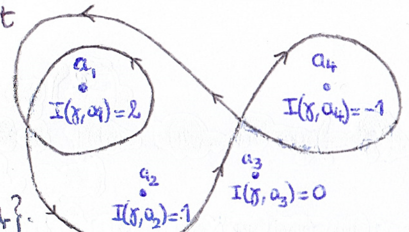
Thm 23 :
Si $f(x,\cdot)$ est continue par morceaux et intégrable,
Et si $\frac{\partial f}{\partial x}$ vérifie les hypothèses du thm 22,
Alors $\Phi : x \longmapsto \int_I f(x,t)\,dt$ est C^1,
Et $\Phi'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$

Ex 24 : $I(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}\,dt$ est C^1
$I'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ donc $I(x) = I(0) + \arctan x = \arctan x$

Ex 25 : Transformée de Fourier de la gaussienne
On cherche $\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-x^2}\,dx$.
$\hat{f}$ est C^1 et $\hat{f}'(t) = -\frac{t}{2}\hat{f}(t)$
Donc $\hat{f}(t) = \hat{f}(0)\exp(-t^2/4) = \sqrt{\pi}\exp(-t^2/4)$.

4 Analyse complexe ([OA], p. 67)

Déf 26 : Indice d'un point p par rapport à un lacet γ ne passant pas par p :
$$I(\gamma,p) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-p}.$$

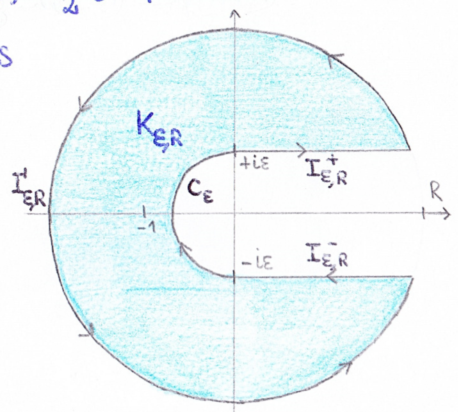


Thm 27 : Théorème des résidus
Soit f holomorphe sur $\mathcal{V} = \mathcal{U}\setminus\{a_1,\dots,a_r\}$.
Soit γ un chemin continu fermé dans $\mathcal{V}$ tel que $I(\gamma,z) = 0$ pour tout $z \notin \mathcal{U}$;
On a : $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{r} I(\gamma,a_i)\,\mathrm{Res}(f,a_i)$.

Ex 28 : On cherche $I(\alpha) := \int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha t)}{1+t^2}\,dt$ ([AM], p. 248-249)
Pour $\alpha > 0$, on a : $I(\alpha) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha t}}{1+t^2}\,dt\right)$
On intègre $z \mapsto \frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2}$ le long du demi-cercle supérieur centré en 0, de rayon R.
Le thm des résidus donne : $I(\alpha) = \frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}$.

App 29 : Formule des compléments
On a : pour $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$,
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

↑ DÉVELOPPEMENT N°2
([AM], p. 249)



III CALCUL APPROCHÉ D'INTÉGRALES

1 Méthodes des rectangles

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue ; $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n = b$.
Motivation : Chasles $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\,dx$.

On parle de méthode des rectangles :
* à gauche : $\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) f(\alpha_i)$
* à droite : $\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) f(\alpha_{i+1})$

Dans le cas où les variations de f sont connues, ces méthodes donnent un encadrement de $\int_a^b f(x)\,dx$.

On parle aussi de méthode du point milieu :
$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i)\, f\left(\frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2}\right).$$

2 Méthode de quadrature de Gauss ([ROM], p.338-346)

Soit π une fonction poids sur $]a,b[$, on cherche $(\lambda_{n,k})$ et $(x_{n,k})$ tels que :
$$\forall n \geq 1,\ \forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \quad \int_a^b P(x)\pi(x)\,dx = \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k} P(x_{n,k}).$$

On note (P_n) la suite de polynômes orthogonaux associés à π, avec $\deg P_n = n$. On note $P_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k^{(n)} x^k$, et $\alpha_n^{(n)} > 0$.

Lem 30 :
De tels coefficients $(\lambda_{n,k})_k$ existent $\Leftrightarrow$ les $(x_{n,k})_k$ sont les n racines du polynôme P_n.
Dans ce cas, on a de plus unicité.

On peut alors approximer :
$$\int_a^b f(x)\pi(x)\,dx \simeq \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k} f(x_{n,k}).$$

On peut majorer l'erreur :
$$|E_n(f)| = \left|\int_a^b f(x)\pi(x)\,dx - \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k} f(x_{n,k})\right| \leq \frac{\|f^{(2n)}\|_\infty}{(2n)!\,(\alpha_n^{(n)})^2}$$

3 Méthode de Monte-Carlo ([PT], p. 78)

On veut calculer $I = \int f(x) g(x)\,dx$ où $f \geq 0$ et $\int f(x)\,dx = 1$.
Si Y est une va de densité f, on a : $\mathbb{E}[g(Y)] = I$.
Soient $Y_1, \ldots, Y_n$ des vaiid de même loi que Y.
On a : $I \simeq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(Y_i)$.

En effet, si $Y \in L^2$, on a :
$$\frac{\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g(Y_i) - \mathbb{E}[g(Y)]\right)}{\underbrace{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(g(Y_i) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n g(Y_k)\right)^2}}_{\text{Estimateur de } \sqrt{Var(g(Y))} \text{ noté } \Sigma_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Ceci permet de déduire un intervalle de confiance asymptotique :
Pour n « assez grand », on a :
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g(Y_i) - \mathbb{E}[g(Y)]\right| \leq \frac{1{,}96\,\Sigma_n}{\sqrt{n}}\right) \simeq 0{,}95$$

[GOU] : Gourdon, Analyse (2e édition)
[BP] : Briane Pagès, Théorie de l'intégration (3e édition)
[OA] : Beck Malick Peyré, Objectif Agrégation (2e édition)
[AM] : Amar Matheron, Analyse Complexe
[ROM] : Rombaldi, Interpolation & Approximation
[PT] : Paul S. Toulouse, Thèmes de probabilités et statistique

Intégrale de Fresnel

Stocker Arnaud

15 septembre 2014

Référence : "Les maths en tête, analyse" de Xavier Gourdon, p.342 de la deuxième édition.
Leçons possibles : 236.

Théorème 1. *L'intégrale de Fresnel* $\phi = \int\limits_0^{+\infty} e^{ix^2}dx$ *vaut* $e^{i\pi/4}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Démonstration. Pour $0 \leq t$, on pose :

- $f(t) = \int\limits_0^t e^{ix^2}dx$,
- $F(t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^t e^{i(x^2+y^2)}dxdy$,
- $I(T) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T F(t)dt$.

On va exprimer $F(t)$ de deux manières. D'abord, puisque la fonction $(x,y) \mapsto e^{i(x^2+y^2)}$ est continue sur le pavé compact $[0,t] \times [0,t]$, une application du théorème de Fubini permet d'écrire $F(t) = f(t)^2$.
Soient $\Delta_t = \{(x,y)|x \in [0,t],\ y \in [0,x]\}$ et $\Delta'_t = \{(x,y)|y \in [0,t],\ x \in [0,y]\}$. La fonction $(x,y) \mapsto (y,x)$ est un C^1-difféomorphisme de Δ_t dans Δ'_t, donc par le théorème de changement de variables, on a :

$$\begin{aligned} F(t) &= \iint\limits_{\Delta_t} e^{i(x^2+y^2)}dxdy + \iint\limits_{\Delta'_t} e^{i(x^2+y^2)}dxdy \\ &= 2\iint\limits_{\Delta_t} e^{i(x^2+y^2)}dxdy. \end{aligned}$$

La forme de l'intégrande suggère alors un passage en coordonnées polaires : l'application $(r,\theta) \mapsto (x = r\cos\theta, y = \sin\theta)$ est un C^1-difféomorphisme de $K_t = \{(r,\theta)|\theta \in$

$[0,\pi/4],\ r \in [0, t/\cos\theta]\}$ dans Δ_t (faire un dessin). On obtient alors :

$$F(t) = 2\iint_{K_t} e^{ir^2} r dr d\theta = \frac{1}{i}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{t}{\cos\theta}} 2ire^{ir^2} dr d\theta$$
$$= -i\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(e^{i\frac{t^2}{\cos^2\theta}} - 1\right) d\theta$$
$$= i\frac{\pi}{4} - i\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{t^2}{\cos^2\theta}} d\theta.$$

En injectant cette égalité dans $I(T)$ on obtient :

$$I(T) = i\frac{\pi}{4} - \frac{i}{T}\int_0^T\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{t^2}{\cos^2\theta}} d\theta dt.$$

En appliquant (encore) le théorème de Fubini et en effectuant le changement de variable $u = \frac{t}{\cos\theta}$ dans l'intégrale du milieu, on trouve :

$$I(T) = i\frac{\pi}{4} - \frac{i}{T}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta . f(\frac{T}{\cos\theta}) d\theta \quad (*)$$

A ce stade, on voudrait faire tendre T vers l'infini mais cela nécessite d'avoir un contrôle sur f en $+\infty$. On va montrer que f est bornée au voisinage de $+\infty$. Pour cela, il suffit de montrer que l'intégrale de Fresnel est convergente.
Étudions $\int_1^t e^{ix^2} dx$. En effectuant le changement de variable $u = x^2$ puis en faisant une IPP, on trouve :

$$\int_1^t e^{ix^2} dx = \int_1^{t^2} \frac{e^{iu}}{2\sqrt{u}} du = [\frac{e^{iu}}{2i\sqrt{u}}]_1^{t^2} + \frac{1}{4i}\int_1^{t^2} \frac{e^{iu}}{u^{3/2}} du$$

Le premier terme du membre de droite converge vers une limite finie quand $t \to +\infty$ et, par convergence dominée, c'est aussi le cas du second terme.
Ainsi, f est bornée au voisinage de $+\infty$, donc en faisant $T \to +\infty$ dans $(*)$, on trouve :

$$\lim_{T\to+\infty} I(T) = i\frac{\pi}{4}$$

Par ailleurs, $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \phi$ donc $\lim_{t\to+\infty} F(t) = \phi^2$. Or $I(T)$ n'est autre que la moyenne de Cesàro de $F(t)$, donc, par le théorème éponyme, $\lim_{T\to+\infty} I(T) = \phi^2$.
Par unicité de la limite, on obtient que $\phi^2 = i\frac{\pi}{4}$ ce qui détermine ϕ au signe près :

$$\phi = \pm e^{i\pi/4}\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Enfin, pour déterminer le bon signe, on regarde la partie imaginaire de ϕ :

$$\begin{aligned}
\Im(\phi) = \Im(\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx) = \Im(\int_0^{\infty} \frac{e^{iu}}{2\sqrt{u}} du) &= \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du + \int_{(2k+1)\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du \right)
\end{aligned}$$

Et, en faisant le changement de variable $t = u - \pi$ dans la deuxième intégrale :

$$\Im(\phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin u}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u+\pi}} \right) du \geq 0.$$

Ainsi,

$$\phi = e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$\square$

Formule des compléments : analyse complexe, Eric Amar et Etienne Matheron p.249

Leçons : 236

On veut montrer que $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$ pour $0 < \mathrm{Re}\, z < 1$

Γ est la fonction Gamma :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

Lemme : $\forall \alpha \in]0,1[$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}$

Preuve : posons $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$ (bien définie car intégrale d'une fonction mesurable positive) et $I_\alpha < +\infty$.

En effet - $u : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ continue sur $]0,+\infty[$ donc $L^1_{loc}(1,+\infty)$

- en 0 $\frac{1}{t^\alpha(1+t)} \sim \frac{1}{t^\alpha}$ intégrable car $0<\alpha<1$

- en $+\infty$ $\frac{1}{t^\alpha(1+t)} \sim \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ intégrable car $\alpha+1>1$

Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus [0,+\infty[$ et soit $f : \Omega \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$
$$z \mapsto \frac{1}{z^\alpha(1+z)}$$
où $z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$ si $z = re^{i\theta}$, $\theta \in]0,2\pi[$.

La fonction f est holomorphe sur $\Omega \setminus \{-1\}$ et possède un pôle simple en -1 avec :

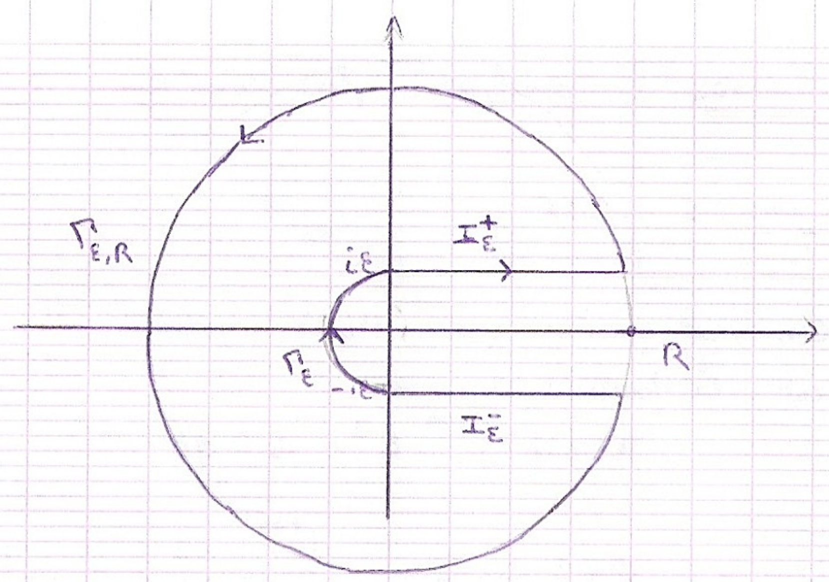
$$\mathrm{Res}(f,-1) = \lim_{z \to -1} (1+z) f(z) = \frac{1}{(-1)^\alpha} = e^{-i\pi\alpha}$$

Pour $0 < \varepsilon < 1 < R$ on définit $\gamma_{\varepsilon,R} = \Gamma_\varepsilon \cup I^+_{\varepsilon,R} \cup I^-_{\varepsilon,R} \cup \Gamma_{\varepsilon,R}$

où $\Gamma_\varepsilon = \{ |z| = \varepsilon \,,\ \mathrm{Re}(z) < 0 \}$

$I^+_{\varepsilon,R} = [i\varepsilon, i\varepsilon + \sqrt{R^2-\varepsilon^2}]$ et $I^-_{\varepsilon,R} = [-i\varepsilon, -i\varepsilon + \sqrt{R^2-\varepsilon^2}]$

$$\Gamma_{\varepsilon,R} = \{ Re^{i\theta} \,;\ \theta \in [-\pi,\pi] \text{ et } |\theta| \geq \underbrace{\arctan \frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}}}_{= \theta_{\varepsilon,R}} \}$$



Comme $-1 \in \operatorname{Int} \gamma_{\varepsilon,R}$, le théorème des résidus donne :

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = 2i\pi\, e^{-i\pi\alpha}. \qquad \forall (\varepsilon, R).$$

On va passer à la limite quand $\varepsilon \to 0$ puis $R \to +\infty$.

Étape 1 :

a/ $$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,dz \right| = \left| \int_{\pi/2}^{3\pi/2} i f(\varepsilon e^{i\theta}) \varepsilon e^{i\theta}\, d\theta \right|$$

$$\leqslant \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{|\varepsilon|}{|\varepsilon^\alpha| . |1+\varepsilon e^{i\theta}|} d\theta \leqslant \pi\, \varepsilon^{1-\alpha} . \frac{1}{1-\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

b/ $$\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \mathbb{1}_{[\theta_{\varepsilon,R},\, 2\pi - \theta_{\varepsilon,R}]}(\theta) \frac{i R e^{i\theta}}{R^\alpha e^{i\alpha\theta}(1+Re^{i\theta})} d\theta$$

On veut appliquer le thm de cv dominée :

i/ $$\mathbb{1}_{[\theta_{\varepsilon,R},\, 2\pi - \theta_{\varepsilon,R}]}(\theta) \frac{i R e^{i\theta}}{R^\alpha e^{i\alpha\theta}(1+Re^{i\theta})} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \mathbb{1}_{[0,2\pi]}(\theta) \frac{i R e^{i\theta}}{R^\alpha e^{i\alpha\theta}(1+R\ldots}$$

ii/ $$\left| \quad " \quad " \quad \right| \leqslant \frac{R^{1-\alpha}}{R-1} \in L^1(0, 2\pi)$$

Donc $$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{i R^{1-\alpha} e^{i(1-\alpha)\theta}}{1+Re^{i\theta}} d\theta$$

c/ $\displaystyle\int_{I^+_{\varepsilon R}} f(z)dz = \int_0^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} f(i\varepsilon + t)\,dt = \int_0^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} \frac{1}{(t+i\varepsilon)^\alpha(1+t+i\varepsilon)}\,dt$

Comme $(t+i\varepsilon)^\alpha = \left(\sqrt{t^2+\varepsilon^2}\, e^{i\,\mathrm{Arcsin}\frac{\varepsilon}{\sqrt{t^2+\varepsilon^2}}}\right)^\alpha \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} t^\alpha \quad (t>0)$

On a :

- $\mathbb{1}_{[0,\sqrt{R^2-\varepsilon^2}]}(t)\, f(i\varepsilon+t) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \mathbb{1}_{[0,R]}(t)\, f(t)$

- $|\quad " \quad| \leq \mathbb{1}_{[0,R]}(t)\, \dfrac{1}{t^\alpha(1+t)}$ intégrable

Thm de cv dominée $\Rightarrow$ $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{I^+_{\varepsilon R}} f(z)dz = \int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$

d/ $\displaystyle\int_{I^-_{\varepsilon R}} f(z)dz = -\int_0^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} f(t-i\varepsilon)\,dt$ et $(t-i\varepsilon)^\alpha \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} t^\alpha e^{2\pi i\alpha}$

Donc les mêmes argument qu'en c/ montrent que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{I_{\varepsilon,R}} f(z)dz = -e^{2\pi i\alpha}\int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$$

Finalement :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{i R^{1-\alpha} e^{i(1-\alpha)\theta}}{1+Re^{i\theta}}\,d\theta + (1-e^{i2\pi\alpha})\int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$$

$$= 2i\pi e^{-i\pi\alpha}.$$

<u>Etape 2</u> : on fait $R \to +\infty$.

a/ $\cdot\ \mathbb{1}_{[0,R]}(t)\dfrac{1}{t^\alpha(1+t)} \longrightarrow \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)\dfrac{1}{t^\alpha(1+t)}$

$\cdot\ |\quad " \quad| \leq \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)\dfrac{1}{t^\alpha(1+t)} \in L^1(0,+\infty)$

Par convergence dominée, $\displaystyle\int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} \xrightarrow[R\to+\infty]{} I_\alpha$

b/ $\displaystyle\left|\int_0^{2\pi} \frac{i R^{1-\alpha} e^{i(1-\alpha)\theta}}{1+Re^{i\theta}}\,d\theta\right| \leq 2\pi \frac{R^{1-\alpha}}{R-1} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$

Donc $(1-e^{-2i\pi\alpha}) I_\alpha = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}$ ie $I_\alpha = \dfrac{\pi}{\sin \pi\alpha}$

<u>Formule des compléments</u> : $0 < \mathrm{Re}\, z < 1$ $\quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$

<u>Preuve</u>: d'après le thm des zéros isolés, il suffit de prouver l'égalité pour $z = \alpha \in]0,1[$

Soit $\alpha \in]0,1[$

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt\right)\left(\int_0^{+\infty} s^{-\alpha} e^{-s} ds\right)$$

(Fubini)
$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} s^{-\alpha} t^{\alpha-1} e^{-t-s}\, dt\, ds = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{s}\right)^{\alpha} e^{-(s+t)} ds \frac{dt}{t}$$

$\varphi :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ est un C^1-difféo

$(s,t) \longmapsto (u,v) = \left(s+t, \dfrac{t}{s}\right)$

$\left[\varphi^{-1}(u,v) = \left(\dfrac{uv}{1+v}, \dfrac{u}{1+v}\right)\right]$ et $|\mathrm{Jac}_{\varphi^{-1}}(u,v)| = \dfrac{-u}{(1+v)^2} = \dfrac{-t}{v(1+v)}$

Donc $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \displaystyle\int_{]0,+\infty[^2} \frac{e^{-u}}{v^{1-\alpha}(1+v)}\, du\, dv = \int_0^{+\infty} \frac{dv}{v^{1-\alpha}(1+v)}$

$$= \frac{\pi}{\sin \pi(1-\alpha)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$