

ILLUSTRER PAR DES EXEMPLES QUELQUES MÉTHODES D'INTÉGRATION DES FONCTIONS D'UNE OU PLUSIEURS VARIABLES RÉELLES.

236

Les méthodes d'intégration sont nombreuses et variées. Nous en présentons ici qu'une liste non-exhaustive. On se place pour toute la leçon dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue.

I) Méthodes élémentaires sur \mathbb{R} [Gou] [Far]

1) Utilisation des primitives:

Thm 1: Si F est une primitive de f intégrable sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

Exemple 2: Fonctions polynomiales: $\int_a^b x^n dx = [\frac{1}{n+1} x^{n+1}]_a^b$.
 * Fractions rationnelles via une décomposition en éléments simples: $\int \frac{1}{(x+1)^2(x^2+x+1)} dx = \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{dx}{x^2+x+1} - \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$
 $= \ln|x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) \right] - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1}$
 $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$

2) Intégration par parties:

Thm 3: Si f et g sont continus sur $[a, b]$, alors: $\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$

Applications: Calcul des primitives de \ln , \arctan ...
 * Intégrales de Wallis: $\int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx = W_n$.
 Par intégration par parties, on trouve $nW_n = (n-1)W_{n-2}$.

3) Changement de variables:

Thm 5: Si f est continue et φ de classe C^1 sur $[a, b]$, avec $\varphi([a, b]) \subset D_f$, alors $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx$.

Exemple: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(\sqrt{2}) - 1$ (avec $\varphi(x) = \sqrt{1+x^2}$)

Application 7: Les règles de Bioche: donnent un changement de variable à réaliser pour intégrer une fraction rationnelle en $\cos(t)$ et $\sin(t)$.

Soit $f(t) = F(\cos t, \sin t)$ avec $F \in \mathbb{R}(X, Y)$. Alors:

- ① Si $f(\pi-t) = f(t)$, alors $\varphi(t) = \cos t$.
- ② Si $-f(\pi-t) = f(t)$, alors $\varphi(t) = \sin t$.
- ③ Si $f(\pi+t) = f(t)$, alors $\varphi(t) = \tan t$.
- ④ Si les conditions de ①, ② et ③ sont vérifiées, alors $\varphi(t) = \cos(2t)$.
- ⑤ Sinon, on peut essayer avec $\varphi(t) = \tan \frac{t}{2}$.

Exemple 8: $\int \frac{\sin t}{(\cos t)^2} dt = \int -\frac{1}{x^2} dx$ (cas ①)
 $\int \frac{1}{1+\cos t} dt = \int 1 dx$ (cas ⑤)

TROP

II) Intégration sur \mathbb{R}^n :

1) Théorème de Fubini:

Thm 9: Si $f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable, alors les fonctions $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy$ et $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dx$ sont intégrables, et $\int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dx \right) dy$

Remarque 10: Si f n'est pas définie sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ tout entier, on peut se ramener au théorème 9 à l'aide de fonctions caractéristiques.

Exemple 11: $\int_{[0,1]^2} \frac{x}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy = \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx = -I + \frac{\pi}{4} \ln(2)$
 d'où l'on déduit $I = \frac{\pi}{8} \ln(2)$.

2) Changement de variables en dimension n:

Thm 12: Soient U et V deux ouverts de \mathbb{R}^n . $\varphi: U \rightarrow V$ un C^1 -difféomorphisme. Soit $J: U \rightarrow \mathbb{R}$ la matrice jacobienne de φ . Soit $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable. Alors $f \circ \varphi \times |\det J|$ est intégrable, et $\int_V f(y) dy = \int_U f(\varphi(x)) |\det J(x)| dx$

Exemple 13: Intégrale de Gauss.

$I = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \sqrt{\pi}$, via $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta = I^2$
 $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$ $\det J = r$

[Far] II.2.2

[Far] II.2.1 (c)

[604]
IV.4.5
Ex.5

Exemple 14: Intégrale de Fresnel DEVELOPPEMENT

$$\int_{\mathbb{R}^+} e^{iz^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

via passage en polaire et utilisation du théorème de Cauchy continu.

3) Application: Programme de Guldin

Thm 15:

- Soit C une courbe C^1 par morceaux de $\{(x,y) | x > 0\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}^3$
- L'aire de la surface de révolution engendrée par C autour de l'axe (Oy) est égale au produit de la longueur de C par $2\pi r_1$, avec r_1 la distance entre le centre de gravité de C et (Oy) .
- Si de plus C est fermée, le volume des solides de révolution engendré par C est égal au produit de l'aire de la surface délimitée par C par $2\pi r_2$, avec r_2 la distance entre (Oy) et le centre de gravité de cette surface.

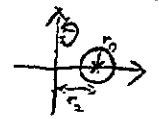
[Can]
p221
4.2

Exemple 15 * Calcul de la surface de la sphère de rayon r



$A = 4\pi r^2$
calcul de r : $0 < r_0 < r$ par symétrie et enveloppe
 r_1 variable alors $\int_0^\pi r e^{i\theta} - r_2 i = 0 \Leftrightarrow r_2 = \frac{2r}{\pi}$
d'où $A = 4\pi r^2$

* Calcul du volume et de l'aire d'un tore de rayons r_0 et r_2



$V = (2\pi r_2)(\pi r_0^2) = 2\pi^2 r_2 r_0^2$
 $A = (2\pi r_2)(2\pi r_0) = 4\pi^2 r_2 r_0$

Remarque 17: Ces formules trouvent des applications en sciences industrielles, par exemple pour calculer la masse d'une pièce fabriquée à partir d'un tour.

4) Application: La formule de Green-Riemann:

Thm 18: Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un compact à bord et $Pdx + Qdy$ une forme différentielle de degré 1 et de classe C^1 sur un ouvert contenant K . Alors K est mesurable, et on a:

[Gou]
IV.6.
Thm.1

$$\int_{\partial K} (Pdx + Qdy) = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dx dy$$

Application: Calcul de l'aire de la surface délimitée par la lemnicate de Bernoulli, d'équation polaire $r^2 = a^2 \cos(2\theta)$ pour $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ et $a > 0$: $\int_{\partial K} Pdx + Qdy$ avec K la boucle de droite, d'où, en prenant $P = \frac{x}{2}$, $Q = \frac{y}{2}$, $\int = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos(2\theta) d\theta = a^2$.

[Gou]
IV.6.
Ex.6

Remarque 19: Cette formule trouve des applications en physique, notamment en électrostatique; en magnétostatique; ou en physique des solides. Par exemple pour calculer l'énergie électrostatique associée à une distribution linéique de charges.

III Techniques utilisant l'analyse complexe:

1) Prolongement analytique

Thm 20: Si f et g sont holomorphes sur $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert, et f et g coïncident sur un ouvert non vide, alors $f = g$ sur Ω .

[A.14]
III.4.5

Thm 21: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ telle que:

[Q.2]
IX.1.7

- $\forall z \in U, x \mapsto f(z, x)$ est intégrable
 - pour presque tout $z \in U, z \mapsto f(z, x)$ est holomorphe sur U
 - pour tout compact $K \subset U$, il existe $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable telle que $|f(z, x)| \leq g(x)$ pour tout $z \in U$, presque tout $x \in \mathbb{R}^n$
- Alors $F(z) = \int_{\mathbb{R}^n} f(z, x) dx$ est holomorphe dans U et $F'(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial z}(z, x) dx$

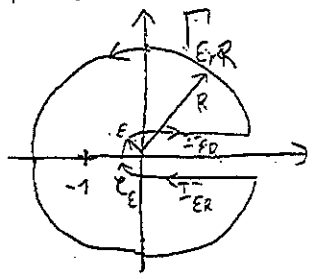
[Q-Z] Application 22: Transformée de Fourier de $f: x \mapsto e^{-x^2}$
 VIII.4.6 On pose $F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{zx} e^{-x^2} dx$
 F est holomorphe par le Thm 21 et coïncide avec $G(z) := \sqrt{\pi} e^{-z^2/4}$
 sur l'axe réel.
 donc $F = G$ par le Thm 20 et $\hat{f}(t) = F(-it) = \sqrt{\pi} e^{-t^2/4}$
2) Théorème des résidus

[A-M] Thm 23: Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert, $S \subset \Omega$ discret, f holomorphe sur $\Omega \setminus S$
 VIII.1.3) Soit $K \subset \Omega$ un compact à bord régulier tel que $\partial K \cap S = \emptyset$
 Alors $K \cap S$ est fini et $\int_{\partial K} f(z) dz = 2i\pi \sum_{z \in K \cap S} \text{Res}(f, z)$

[A-M] Application 24: formule des compléments.
 VIII.4.1 $\forall \alpha \in]0, 1[$, $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$ DEVELOPPEMENT
 par le calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^x(1+t)}$ en utilisant $\int_{\partial K_{\epsilon, R}} \frac{dt}{e^x(1+t)}$

avec $K_{\epsilon, R}$ le compact délimité par:

- $C_{\epsilon} = \{ |z| = \epsilon, \text{Re}(z) \leq 0 \}$
- $I_{\epsilon, R}^+ = [i\epsilon, i\epsilon + \sqrt{R^2 - \epsilon^2}]$
- $I_{\epsilon, R}^- = [-i\epsilon, -i\epsilon + \sqrt{R^2 - \epsilon^2}]$
- $\Gamma_{\epsilon, R} = \{ R e^{i\theta}, \theta \in [\theta_{\epsilon, R}, 2\pi - \theta_{\epsilon, R}] \}$
 et $\theta_{\epsilon, R} = \arctan \frac{\epsilon}{\sqrt{R^2 - \epsilon^2}}$



Ref: [Gou]: X. GOURDON, Les Maths en fête, 2^e édition. (ellipses)
 [Far]: J. FARAUT, Calcul Intégral (EDP sciences)
 [Can]: B. CANDELPERGHIER, Calcul Intégral (Lacrima)
 [A-M]: E. AMAR; E. MATHERON, Analyse complexe (Lacrima)
 [Q-Z]: H. GUEFFÉLEC; C. ZUILY, Analyse pour l'agrégation
 cours et exercices corrigés (Dunod)

Formule des compléments [Amar-Matheson] 8.4.4

Théorème des résidus: $\Omega \subset \mathbb{C}$, so Ω discret, $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus S)$. Soit $K \subset \Omega$ tel que ∂K est régulier et $\partial K \cap S = \emptyset$. Alors $K \cap S$ est fini et $\int_{\partial K} f(z) dz = 2i\pi \sum_{z \in K \cap S} \text{Res}(f, z)$

Formule des compléments: $\forall \alpha \in]0, 1[$, $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$

Lemme: $\forall \alpha \in]0, 1[$, $I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$

Nous allons démontrer le lemme grâce au thm des résidus, puis ramener $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$ à I_α grâce à un changement de variables

Vern (Lemme):

* I_α bien déf car $u_\alpha(t) \in C^0$ et ≥ 0 sur \mathbb{R}_+^*

* $I_\alpha < +\infty$ car $u_\alpha \sim \frac{1}{t^\alpha}$ et $u_\alpha \sim \frac{1}{t^{1+\alpha}}$

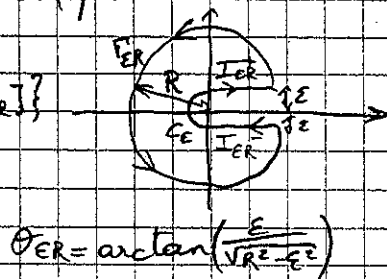
* Soit $K \subset \mathbb{C}$ délimité par (pour $0 < \varepsilon < 1 < R$):

$C_\varepsilon = \{ \varepsilon e^{i\theta} / \theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \}$

$\Gamma_{ER} = \{ R e^{i\theta} / \theta \in [\theta_{ER}, 2\pi - \theta_{ER}] \}$

$I_{ER}^+ = \{ t + i\varepsilon / t \in [0, \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}] \}$

$I_{ER}^- = \{ t - i\varepsilon / t \in [0, \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}] \}$



* Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, et $f: \Omega \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{C} \in \mathcal{H}(\Omega \setminus S)$ avec une détermination du log correspondant! $f \mapsto \frac{1}{z^\alpha(1+z)}$

f a un pôle simple en -1 , et $\text{Res}(f, -1) = \frac{1}{(-1)^\alpha} = e^{-i\pi\alpha}$

* Thm des résidus: $\int_{\partial K} f(z) dz = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}$

* Calcul de $\int_{\partial K_\varepsilon} f(z) dz$ (et de sa limite pour $\varepsilon \rightarrow 0$ et $R \rightarrow +\infty$)

(C) $\rightarrow \int_{C_\varepsilon} f(z) dz = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{i\varepsilon e^{i\theta}}{\varepsilon^\alpha(1+\varepsilon e^{i\theta})e^{i\theta\alpha}} d\theta$

Donc $|\int_{C_\varepsilon} f(z) dz| \leq \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^\alpha |1+\varepsilon e^{i\theta}|} d\theta \leq \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^\alpha (1-\varepsilon)} d\theta$ (car $|1+\varepsilon e^{i\theta}| \geq 1-\varepsilon$)
 $= \frac{\pi \varepsilon^{1-\alpha}}{1-\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ car $\alpha < 1$

(Gamma_ER) $\rightarrow \int_{\Gamma_{ER}} f(z) dz = \int_{\theta_{ER}}^{2\pi - \theta_{ER}} \frac{iR e^{i\theta}}{R^\alpha(1+R e^{i\theta})e^{i\theta\alpha}} d\theta$

$\xrightarrow{E \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{iR e^{i\theta}}{R^\alpha(1+R e^{i\theta})e^{i\theta\alpha}} d\theta$

par convergence dominée (l'intégrande ne dépend pas de ε)

Où, $|\frac{iR e^{i\theta}}{R^\alpha(1+R e^{i\theta})e^{i\theta\alpha}}| \leq \frac{R^{1-\alpha}}{R-1}$ donc

$|\int_0^{2\pi} \frac{iR e^{i\theta}}{R^\alpha(1+R e^{i\theta})e^{i\theta\alpha}} d\theta| \leq \frac{2\pi R^{1-\alpha}}{R-1} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$ car $\alpha > 0$

$$\textcircled{I_{ER}^+} \rightarrow \int_{I_{ER}^+} f(z) dz = \int_0^{R^2 - \varepsilon^2} \frac{1}{(t+i\varepsilon)^\alpha (1+t+i\varepsilon)} dt$$

$$\text{Or, } (t+i\varepsilon)^\alpha \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} t^\alpha \text{ et } \left| \frac{1}{(t+i\varepsilon)^\alpha (1+t+i\varepsilon)} \right| \leq \frac{1}{t^\alpha (1+t)}$$

donc par convergence dominée :

$$\int_{I_{ER}^+} f(z) dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^R \frac{1}{t^\alpha (1+t)} dt \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} I_\alpha$$

$\textcircled{I_{ER}^-}$ \rightarrow Par le même calcul que ci-dessus, mais en remarquant que $(t-i\varepsilon)^\alpha \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} e^{2i\pi\alpha}$ car la détermination du log est définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$,

$$\text{on obtient } \int_{I_{ER}^-} f(z) dz \xrightarrow[\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}]{} e^{2i\pi\alpha} I_\alpha$$

\textcircled{JK} \rightarrow Finalement, on obtient : sens de parcours

$$\int_{JK} f(z) dz = \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z) dz + \int_{I_{ER}^-} f(z) dz + \int_{I_{ER}^+} f(z) dz - \int_{I_{ER}^-} f(z) dz$$

$$\xrightarrow[\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}]{} (1 - e^{2i\pi\alpha}) I_\alpha$$

$$* \text{ Pour conclure, } I_\alpha = \frac{2i\pi e^{i\pi\alpha}}{1 - e^{-2i\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

Bien joué, Père Castor !

Rém. (Formule des compléments)

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{s}\right)^\alpha \frac{e^{-(t+s)}}{t} dt ds$$

On fait le changement de variables défini par :

$$\varphi: \begin{cases} u \mapsto t+s \\ v \mapsto \frac{t}{s} \end{cases} \quad \varphi^{-1}: \begin{cases} t \mapsto \frac{uv}{1+v} \\ s \mapsto \frac{u}{1+v} \end{cases}$$

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \\ \frac{1}{1+v} & \frac{-u}{(1+v)^2} \end{pmatrix} \quad \det J_\varphi = \frac{-u}{(1+v)^2} = \frac{-t}{v(1+v)}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{v^\alpha e^{-u}}{v(1+v)} du dv \\ &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-u} du \right) \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{v^{1-\alpha}(1+v)} dv \right) \\ &= 1 \\ &= \frac{\pi}{\sin((1-\alpha)\pi)} \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \end{aligned}$$

Et voilà.