236

Illustrer par des exemples quelques méthodes de calculs d'intégrales de fonctions d'une/plusieurs variables

convention : On se place par défaut en Lebesgue-intégrabilité.

1. METHODES DIRECTES

1.1. Primitives

Thm 1 : $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ admet des primitives et si F en est une, alors $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ [GOU]

ex 1 : $\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(b) - \arctan(a)$

1.2. Intégration par parties

thm 2 : Si $u, v \in \mathcal{C}^1([a,b])$, $\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$

ex 2 : Intégrale de Wallis

ex 3 : $\Gamma(n+1) = n!$ où $n \in \mathbb{N}$

1.3. Changement de variables

Thm 3 : U ouvert de $\mathbb{R}^n$; $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$-difféo de jacobien $J\varphi$. Si $V := \varphi(U)$, alors pour toute fonction mesurable $f : V \to \mathbb{C}$: [BP]

$$\int_V f(v)dv = \int_U (f \circ \varphi)(u) |J\varphi(u)| du$$

ex 4. changement de variables polaire $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ où $r \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in [0, 2\pi[$

ex 5. Intégrales de fractions rationnelles en $\cos\theta$ (resp. $\sin\theta$) : poser $t = \tan\frac{\theta}{2}$

1.4. theorèmes de Fubini :

thm 4. • Soit $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^+$ mesurable. Alors les intégrales suivantes existent et on a [BP]

$$(*) \int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f(x,y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx\right)dy$$

• Soit $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{C}$ intégrable, alors $(*)$ est encore vérifiée.

DVP 1 : Intégrale de Fresnel

ex 6. Intégrale de Gauss $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ (GOU)

App 1. Volume de la boule unité euclidienne dans $\mathbb{R}^d$:

• si d est pair : $V_d = \frac{\pi^{d/2}}{(d/2)!}$

• si d est impair : $V_d = \left[2^d \pi^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{d-1}{2}\right)!\right] \times \frac{1}{d!}$

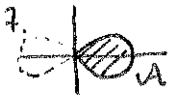
1.5. Formule de Green-Riemann

Thm 5. Soit K un compact à bords de $\mathbb{R}^2$ et $Pdx + Qdy$ une 1-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1(U)$ où $K \subset U$. Alors [GOU]

$$\int_{\partial K^+} (Pdx + Qdy) = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

App 2 : calcul de l'aire d'un compact à bords

$$\mathcal{A} = \iint_K dxdy = \int_{\partial K^+} xdy = -\int_{\partial K^+} ydx = \frac{1}{2}\int_{\partial K^+} xdy - ydx$$

ex 7. 

lemniscate de Bernoulli : $r^2 = a^2\cos 2\theta$ où $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, $a > 0$

$\mathcal{A} = \frac{a^2}{2}$

2. METHODES INDIRECTES

2.1. convergences

Thm 6. (Beppo-Levi)

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions mesurables positives. [BP]

Alors : • $\lim_{n \to +\infty} f_n$ est $\mathcal{A}$-mesurable

• $\int_X \lim_{n\to+\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu$

App 3. Interversion Σ et $\int$:

$$\int_X \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n\right) d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_X f_n\right) d\mu$$ où $(f_n)_{n \geq 0}$ fonctions mesurables ≥ 0.

Thm 7. (Convergence dominée)

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ suite de fonctions mesurables qui converge pp vers f. On suppose qu'il existe $g : (X, \mathcal{A}, \mu) \to [0, +\infty]$ mesurable positive μ-intégrable telle que $\forall_{pp}\, x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ [BP]

Alors $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim_{n \to +\infty} f_n \, d\mu$

App 4. Intégrales à paramètres

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \times X \to \mathbb{C}$ telle que [BP]

• $\forall t \in I$, $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable

• $\exists t_0 \in I$, $x \mapsto f(t_0, x)$ est intégrable

• $\forall_{pp} x$, $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable et $\forall (x,t) \in X \times I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$ où $g \in L^1(\mu)$

Alors $F : t \mapsto \int f(t,x)\,\mu(dx)$ est bien définie, dérivable par rapport à t et de dérivée
$$F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,\mu(dx)$$
ex 8. Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\varphi_X(t) = \sqrt{\pi}\, e^{-t^2/4}$

(AM) 2.2. Théorème des résidus

Def 1. Soit γ un lacet et $a \notin \mathrm{supp}\,\gamma$. On appelle indice de a par rapport à γ l'entier.
$$\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$
Def 2. Soit $a \in \mathbb{C}$.
Soit f une fonction holomorphe sur une couronne centrée en a. On appelle résidu de f en a le coefficient de $\frac{1}{z-a}$ dans le développement en série de Laurent de f. On le note $\mathrm{Res}(f,a)$

Thm 8. Si f est holomorphe sur un ouvert étoilé $\Omega \neq \emptyset$ de $\mathbb{C}$, sauf sur un ensemble S de singularités isolées, alors pour tout lacet γ de Ω ne rencontrant pas S, on a
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{a\in S} \mathrm{Ind}_\gamma(a)\,\mathrm{Res}(f,a)$$
ex 9. $I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$ si $a>1$
$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^6} = \frac{\pi}{3}$$
Thm 9. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soient f et g deux fonctions analytiques sur Ω qui coïncident sur une partie $U \subset \Omega$ possédant un point d'accumulation ; alors $f = g$ sur Ω

(AM) $\boxed{\text{DVP 2}}$: $\boxed{\text{Formule des compléments}}$. $\forall z \in \mathbb{C}$, $0 < \mathrm{Re}\, z < 1$,
$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

3. MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LE CALCUL EFFECTIF

3.1. Sommes de Riemann et méthode des rectangles

(Dem) Soit $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ et $\sigma : \alpha = \alpha_0 < \dots < \alpha_n = \beta$ une subdivision de $[\alpha,\beta]$. Soit $\xi = (\xi_i)_{i=0,\dots,n-1}$ une famille de n réels de $[\alpha,\beta]$.

[Rom] Def 3. On appelle somme de Riemann de f pour la subdivision et la suite ξ la quantité
$$S(f,\sigma,\xi) = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1})\, f(\xi_i)$$
Thm 9. Avec les mêmes notations, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour toute subdivision σ de pas $< \eta$, on a :
$$\left\| \int_\alpha^\beta f(x)\,dx - S(f,\sigma,\xi) \right\| \leq \varepsilon$$
App 5. $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta-\alpha}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\alpha + i\frac{\beta-\alpha}{n}\right) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$

ex 10. Si $f : \begin{array}{l}[0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{1+t}\end{array}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) = \log 2$

Méthodes des rectangles :
On cherche des formules approchées pour $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$.
On a $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\,dx$

On approxime alors par :
$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i)\, f(\xi_i)$$
où $\xi_i \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ (méthode d'ordre 0)

- Si $\xi_i = \alpha_i$: méth des rectangles à gauche et pour $\alpha_i = \alpha + i\frac{\beta-\alpha}{n}$ et $f \in \mathcal{C}^1([\alpha,\beta])$,
$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)\,dx - S(f,\sigma,\xi) \right| \leq \frac{\|f'\|_\infty (\beta-\alpha)^2}{2n}$$

• si $\xi_i = \frac{d_i + d_{i+1}}{2}$: méth du point milieu
si $(d_i)_{i=0,\dots,n-1}$ sont équidistants et $f \in \mathcal{C}^2$;

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)\,dx - S(f,\sigma,\xi) \right| \le \frac{(\beta-\alpha)^3}{24 n^2} \|f''\|_\infty$$

[DEM] 3.2. Méthode des trapèzes :
on approxime en sommant sur la subdivision les aires des trapèzes correspondants, ie

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \simeq \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{d_{i+1}-d_i}{2}\left[f(d_{i+1}) + f(d_i) \right]}_{=:\, T_n(f)}$$

où $d_i = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{n} i$

Si $f \in \mathcal{C}^2$: $\left| \int_\alpha^\beta f(x) - T_n(f) \right| \le \frac{(\beta-\alpha)^3}{12 n^2} \|f''\|_\infty$

[TOU] 3.3. Méthode de Monte-Carlo :
on souhaite calculer $I = \int fg\,d\mu$ où $f \ge 0$, $\int f = 1$
on considère alors Y une v.A. de densité f.
Dès lors, la moyenne empirique de $X := g(Y)$ approchera $\mathbb{E}[g(Y)] = I$ via :

Thm 10. Soit $(X_n)_{n \ge 0}$ va réelles iid possédant un moment d'ordre 1. Alors

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[X_1] \quad \text{ps.}$$

on peut même trouver un intervalle de confiance pour I.

Thm 11. Si $(X_n)_{n \ge 0}$ var. iid telles que $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$ alors, si $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, on a :

$$\frac{S_n - n\,\mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Lemme 1 : Si $(X_n)_{n \ge 0} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $(Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} c > 0$ alors $(X_n, Y_n) \to (X, c)$. Si $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$, alors $X_n Y_n \to cX$.

App 6. Si X possède un moment d'ordre 2, notons $\bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$. Posons $\sigma_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$
on a $\sigma_n^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma^2$
on a alors :

$$\sqrt{\frac{n}{\sigma_n^2}} \left(\bar{X}_n - \mathbb{E}[X] \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

on trouve alors l'intervalle de confiance asymptotique à 95 % :

$$I_c = \left[\bar{X}_n - 1{,}96 \sqrt{\frac{\sigma_n^2}{n}} \,;\, \bar{X}_n + 1{,}96 \sqrt{\frac{\sigma_n^2}{n}} \right]$$

Ex 11. $I = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^{1/4}}\,dx$

$Y \sim \mathcal{E}(1)$ de densité $f(x) = e^{-x}$
$X := Y^{-1/4}$ possède un moment d'ordre 2
$\mathbb{E}[X^2] = \sqrt{\pi}$
Si $n = 100\,000$, $I_c = [1{,}223155 ; 1{,}229694]$.

Références :

[GOU] Gourdon – Analyse
[BP] Briane et Pagès, théorie de l'intégration
[AM] Amar et Matheron – Analyse complexe
[DEM] Demailly – Analyse numérique et équations différentielles
[Rom] Rombaldi – Éléments d'analyse
[TOU] Toulouse – thèmes de probabilités et statistiques

2 Développement 1: Formule des compléments

Référence: Amar-Matheron

Soit $\alpha \in]0,1[$. La fonction $f_\alpha : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Quand $t \to 0$, on a $f_\alpha(t) \sim \frac{1}{t^\alpha}$.
Par comparaison de fonctions positives, on en déduit que f_α est intégrable sur $]0,1[$.
De même quand $t \to +\infty$, on a $f_\alpha(t) \sim \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Ainsi f_α est intégrable sur $]0,+\infty[$ et l'intégrale:

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$$

est bien définie.

Lemme 2.1

Soit $\alpha \in]0,1[$. Alors:

$$I_\alpha := \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

Démonstration Soit $0 < \alpha < 1$. On va calculer I_α par le théorème des résidus.
On note $\Omega = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^+$ et $\mathrm{Arg} : \Omega \to]0,2\pi[$ une détermination de l'argument. Pour tout $z \in \Omega$, on définit:

$$z^\alpha = |z|^\alpha \exp(i\alpha \mathrm{Arg}(z))$$

La fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{1}{z^\alpha(1+z)} \end{array} \right.$ est méromorphe sur Ω et possède un unique pôle simple en -1 avec:

$$\mathrm{Res}(f,-1) = \lim_{z\to -1} (z+1)f(z) = \frac{1}{(-1)^\alpha} = e^{-i\alpha\pi}$$

Soit $\epsilon \in]0,1[$ et $R > 1$.
On note $C_\epsilon = \{z \in \mathbb{C}, |z| = \epsilon \text{ et } \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$, $I_{\epsilon,R} = [i\epsilon, \sqrt{R^2-\epsilon^2}+i\epsilon]$, $J_{\epsilon,R} = [-i\epsilon, \sqrt{R^2-\epsilon^2}-i\epsilon]$ et $D_{\epsilon,R} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = R, \mathrm{Arg}(z) \in [\theta_{\epsilon,R}, 2(\pi-\theta_{\epsilon,R})]\}$ avec:

$$\theta_{\epsilon,R} = \arctan \frac{\epsilon}{\sqrt{R^2-\epsilon^2}}$$

D'après le théorème des résidus, on a:

$$\int_{C_\epsilon} f(z)dz + \int_{I_{\epsilon,R}} f(z)dz + \int_{D_{\epsilon,R}} f(z)dz + \int_{J_{\epsilon,R}} f(z)dz = 2i\pi e^{-\pi\alpha} \tag{1}$$

où l'orientation est effectuée dans le sens direct.
On calcule ensuite sur les différentes parties:

$$\begin{aligned} \left|\int_{C_\epsilon} f(z)dz\right| &= \left|\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\epsilon e^{it}) i\epsilon e^{it} dt\right| \\ &\leq \epsilon \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dt}{\epsilon^\alpha |1+\epsilon e^{it}|} \\ &\leq \epsilon \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dt}{\epsilon^\alpha (1-\epsilon)} \\ &\leq \frac{\pi\epsilon^{1-\alpha}}{1-\epsilon} \end{aligned}$$

Donc $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_\epsilon} f(z)dz = 0$. Par ailleurs, on a:

$$\begin{aligned}\left|\int_{D_{\epsilon,R}} f(z)dz\ \right| &= \left|\int_{\theta_{\epsilon,R}}^{2(\pi-\theta_{\epsilon,R})} f(Re^{it})iRe^{it}dt\right| \\ &= \left|\int_0^{2\pi} iR^{1-\alpha}\frac{e^{i(1-\alpha)t}}{1+Re^{it}}\mathbb{1}_{[\theta_{\epsilon,R},2(\pi-\theta_{\epsilon,R})]}(t)dt\right| \\ &\leq \frac{2\pi R^{1-\alpha}}{R-1}\end{aligned}$$

Ainsi quand $\epsilon\to 0$ et $R\to+\infty$, on a $\int_{D_{\epsilon,R}} f(z)dz \to 0$.

Soit $t\in]0,+\infty[$. Quand $\epsilon\to 0$, on a $(t+i\epsilon)^\alpha$ et $(t-i\epsilon)^\alpha$ tendent respectivement vers t^α et $t^\alpha e^{2i\pi\alpha}$. De plus, pour tout $\epsilon>0$, on a:

$$|f(t+i\epsilon)\mathbb{1}_{[0,\sqrt{R^2-\epsilon^2}]}(t)| \leq \frac{1}{t^\alpha(1-t)}\mathbb{1}_{[0,R]}(t)$$

car $|t+i\epsilon|>|t|$ et $|1+t+i\epsilon|>|1+t|$. De même, on a:

$$|f(t-i\epsilon)\mathbb{1}_{[0,\sqrt{R^2-\epsilon}]}(t)| \leq \frac{1}{t^\alpha(1+t)}\mathbb{1}_{[0,R]}(t)$$

La fonction $t\mapsto \frac{1}{t^\alpha(1+t)}\mathbb{1}_{[0,R]}(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, par le théorème de convergence dominée, quand $\epsilon\to 0$, on a:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{I_{\epsilon,R}} f(z)dz = \int_0^R f(t)dt \text{ et } \lim_{\epsilon\to 0}\int_{J_{\epsilon,R}} f(z)dz = -\int_0^R \frac{f(t)}{e^{2i\pi\alpha}}$$

Ceci car on tend vers t à partie imaginaire négative.

Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, quand $R\to+\infty$, ces deux intégrales tendent respectivement I_α et $-e^{-2i\pi\alpha}I_\alpha$.

En conclusion, quand on fait tendre $\epsilon\to 0$ puis $R\to+\infty$ dans la relation (1), on obtient:

$$(1-e^{-2i\pi\alpha})I_\alpha = 2i\pi\alpha e^{-i\pi\alpha}$$

D'où

$$I_\alpha = 2i\pi\frac{e^{-i\pi\alpha}}{1-e^{-2i\pi\alpha}} = 2i\pi\frac{1}{e^{i\pi\alpha}-e^{-i\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$$

■

Théorème 2.1 (***Formule des compléments***)

Pour tout nombre complexe $z\in\mathbb{C}$ tel que $0<\Re(z)<1$, on a:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}$$

Démonstration Par le principe des zéros isolés, il suffit de vérifier que:

$$\forall\alpha\in]0,1[, \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

Soit $\alpha\in]0,1[$. On A:

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) &= \left(\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt\right)\left(\int_0^\infty e^{-t}t^{1-\alpha-1}dt\right) \\ &= \int\int_U t^{\alpha-1}s^{-\alpha}e^{-s-t}dtds \text{ par Fubini} \\ &= \int\int_U \left(\frac{t}{s}\right)^\alpha e^{-(s+t)}ds\frac{dt}{t}\end{aligned}$$

où $U := \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \mid s > 0, t > 0\}$. L'application $\varphi : (t,s) \mapsto (s+t, \frac{t}{s})$ est un C^1-difféomorphisme de U sur U. d'inverse

$$(u,v) \mapsto \left(\frac{uv}{1+v}, \frac{u}{1+u}\right)$$

Le jacobien vaut:

$$\left|\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{t} & -\frac{s}{t^2} \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{t} + \frac{s}{t^2} = \frac{v+1}{t}$$

Par le théorème du changement de variables, on a donc:

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int\int_U \frac{e^{-u}}{v^{\alpha}\,(1+v)} du dv = \int_0^{+\infty} \frac{dv}{v^{\alpha}\,(1+v)}$$

D'où:

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi(1-\alpha)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

■

3 Développement 2: Intégrale de Fresnel

Référence: Gourdon analyse

Remarques

1. On peut justifier proprement la convergence de l'intégrale de Fresnel (via une IPP)
2. On peut aussi prouver le résultat par le théorème intégral de Cauchy en intégrant la fonction $f : z \mapsto e^{-z^2}$ sur un chemin fermé bien choisi. Ici on a choisi une démonstration mettant en oeuvre différentes techniques évoquées dans l'exposé.

Proposition 3.1

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Démonstration

On pose

$$F(t) = \int\int_{[0,t]^2} e^{i(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$f(t) = \int_0^t e^{ix^2}\mathrm{d}x \ , \ I(T) = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\mathrm{d}t$$

Objectif : Calculer $\phi = \int_0^{+\infty} e^{ix^2}\mathrm{d}x$ puis identifier les parties réelles et imaginaires.

On a par le théorème de Fubini:

$$F(t) = f(t)^2$$

Par symétrie par rapport à la droite $y = x$, on a :

$$F(t) = 2\int\int_{\delta_t} e^{i(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

où $\delta_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq x\}$.

En coordonnées polaires, l'ensemble δ_t est représenté par l'ensemble

$$K_t = \left\{(r,\theta) \in (\mathbb{R}^+, [0,2\pi]), 0 \leq r \leq \frac{t}{\cos\theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right\}$$

On a :

$$\begin{aligned}
F(t) &= 2\int\int_{K_t} e^{ir^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{t}{\cos\theta}} 2e^{ir^2} r\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[-ie^{ir^2}\right]_0^{\frac{t}{\cos\theta}}\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} -i\exp\left(i\frac{t^2}{cos^2\theta}\right) + i\mathrm{d}\theta \\
&= i\frac{\pi}{4} - i\int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(i\frac{t^2}{cos^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

Ainsi:

$$\begin{aligned}
I(T) &= \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\mathrm{d}t \\
&= i\frac{\pi}{4} - \frac{i}{T}\int_0^T \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(i\frac{t^2}{\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}t \\
&= i\frac{\pi}{4} - \frac{i}{T}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^T \exp\left(i\frac{t^2}{\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\theta \text{ par Fubini}
\end{aligned}$$

On procède maintenant à un changement de variable :

$$x = \frac{t}{\cos\theta} \Rightarrow \mathrm{d}t = \cos\theta\mathrm{d}x$$

Donc :

$$\begin{aligned}
I(T) &= i\frac{\pi}{4} - \frac{i}{T}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{T}{\cos\theta}} e^{ix^2}\cos\theta\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\theta \\
&= i\frac{\pi}{4} - \frac{i}{T}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta f\left(\frac{T}{\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\phi = \int_0^{+\infty} e^{ix^2}\mathrm{d}x$ converge donc f est bornée en ∞. Donc $I(T) \xrightarrow[T\to\infty]{} i\frac{\pi}{4}$.
On a montré que $F(t) = f(t)^2$ donc $I(T) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\mathrm{d}t$.
Or $f(t)^2 \xrightarrow[t\to\infty]{} \phi^2 = \left(\int_0^{+\infty} e^{ix^2}\mathrm{d}x\right)^2$ donc sa moyenne de Cesaro $I(T)$ converge aussi vers ϕ^2.
Par unicité de la limite de $I(T)$, on a $\phi^2 = i\frac{\pi}{4}$. Finalement, $\phi = \pm\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Il ne reste qu'à trouver le signe. Pour cela, examinons le signe de la partie imaginaire s de ϕ. On a:

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{\sqrt{y}}dy \text{ par le changement de variables } x^2 = y \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \frac{\sin y}{2\sqrt{y}}dy \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{2n\pi}^{2n+\quad\pi} \frac{\sin y}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{y+\pi}}\right)dy
\end{aligned}$$

et chaque terme de la somme est positif. Donc on a nécessairement $\phi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Or, on a

$$\phi = e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} = \int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x + i\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x$$

■