236

ILLUSTRER PAR DES EXEMPLES QUELQUES METHODES DE CALCUL D'INTEGRALES DE FONCTIONS D'UNE OU PLUSIEURS VARIABLES

I CALCUL DE PRIMITIVES, METHODES ELEMENTAIRES.

Th. 1 (fondamental du calcul intégral)
Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Alors, pour $a, b \in \mathbb{R}$ on a :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

Rq. 2 Le théorème précédent admet la généralisation suivante : si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est une distribution telle que $f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, alors $f \in C^0(\mathbb{R})$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$$

Ex. 3 On a :

1) $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$ 2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = 1 + \int_0^x e^t\,dt$ 3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin x = \int_0^x \cos t\,dt$

4) $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\tan x = \int_0^x \frac{dt}{\cos^2 t}$

Th. 4 (intégration par parties)
Soit $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors

$$\int_a^b f g'(t)\,dt = f(t) g(t) \Big]_a^b - \int_a^b f' g(t)\,dt$$

Ex. 5 On a.

1) $\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + \text{cte}, \quad x \in \mathbb{R}$

2) $\int (\log x)^2\,dx = x (\log x)^2 - 2x \log x + 2x + \text{cte}, \quad x \in \mathbb{R}_+^*$

Th. 6 (Changement de variable)
Soit $d \geq 1$, $U, V \subset \mathbb{R}^d$ deux ouverts tels qu'il existe un C^1-difféomorphisme $\phi: U \to V$ et $f \in L^1(V)$. Alors $(f \circ \phi) \cdot |\det[D\phi]| \in L^1(U)$ et

$$\int_U f \circ \phi(x)\,|\det[D\phi(x)]|\,dx = \int_V f(x)\,dx$$

Ex. 7 On a :

$$\int \frac{\sin(2x) e^{\sin^2 x}}{1 + e^{\sin^2 x}}\,dx = \log\left(1 + e^{\sin^2 x}\right) + \text{cte}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Ex. 8 On a : $\int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx = -x + 2\log(e^x - 1) + \text{cte}, \quad x > 0.$

Ex. 9 On a : $\int \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) + \text{cte}$

App. 10 Soit $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue, dérivable en 0 avec $f(x) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x}\right)$.
Alors, $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = f(0) \log(b/a)$

Ex. 11 Dans l'application précédente, on prend $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, $a = \pi$ et $b = 1$. Alors $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\pi x) - \arctan(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \log(\pi)$

Lemme. 12 (théorème de Fubini sur $\mathbb{R}^2$).
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Alors,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \right) dx$$

C'est à dire que cette relation est vraie pour tout représentant de f et toutes les fonctions y sont mesurables.

Ex. 13 (Intégrale gaussienne) On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\,dx = \sqrt{\pi}.$$

II METHODES COMPLEXES, THEOREME DES RESIDUS.

Th. 14 (des résidus)
Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe et $f: U \to \mathbb{C}$ une fonction méromorphe dont on note $a_1, \dots, a_n, \dots \in U$ les pôles (comptés avec leurs multiplicités).
Alors, pour tout chemin fermé $\gamma: [0,1] \to U \setminus \{a_1, \dots\}$ C^1 par morceaux (contin…

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Res}(f, a_n)\,\mathrm{ind}_\gamma(a_n)$$

Rq. 15 La somme ci-dessus est en réalité finie.

Ex. 16 On a : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi$ (Fig. 1)

Ex. 17 On a : $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n} = \frac{\pi}{n \sin(\pi/n)}$ pour $n \geq 2$ (Fig. 2)

Ex. 18 On a : $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}$ (Fig. 3)

Ex. 19 On a : $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$ (Fig. 4)

Ex. 20 On a, pour $0 < a < 1$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$ (Fig. 5)

Ex. 21 On a, pour $\xi \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-2i\pi x \xi)}{\cosh(\pi x)}\,dx = \frac{1}{\cosh(\pi \xi)}$ (Fig. 6)

DEVELOPPEMENT 1.

Ex.22 On a : (Fig. 7)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi x^2)\exp(-2i\pi x\xi)\,dx = \exp(-\pi\xi^2) \quad \text{pour } \xi\in\mathbb{R}.$$

DEVELOPPEMENT 2.

App.23 (théorème d'inversion de Fourier)
Soit $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. On définit la transformée de Fourier $\hat f$ de f par

$$\forall \xi\in\mathbb{R},\quad \hat f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-2i\pi\xi t)\,dt$$

Alors $\hat f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\hat f(\xi)\exp(2i\pi\xi x)\,d\xi$$

III FRACTIONS RATIONNELLES

Th.24
Soit $P,Q\in\mathbb{C}[X]$ tels que $\deg P \leq \deg Q + 2$ et P ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Soit $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{C}$ les zéros de Q (comptés avec multiplicités).
Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P}{Q}(x)\,dx = \sum_{\mathrm{Re}(a_k)>0} 2i\pi\,\mathrm{Res}(P/Q, a_k)$$

(Fig. 8)

$$= \sum_{\mathrm{Re}(a_k)<0} 2i\pi\,\mathrm{Res}(P/Q, a_k)$$

Ex.25 On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+5x^2+4} = \frac{\pi}{6}$$

Lemme 26
Pour $n\geq 1$, pour $\alpha,\rho,q,p\in\mathbb{R}$ on a :

1) $$\int\frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases}\dfrac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + \text{cte} & \text{si } n\neq 1\\ \log|x-a| + \text{cte} & \text{si } n=1\end{cases}$$

2) $$\int\frac{2\alpha(x-\rho)}{((x-\rho)^2+q^2)^n}\,dx = \begin{cases}\dfrac{\alpha}{(1-n)[(x-\rho)^2+q^2]^{n-1}} + \text{cte} & \text{si } n\neq 1\\ \alpha\log((x-\rho)^2+q^2) + \text{cte} & \text{si } n=1\end{cases}$$

3) $$\int\frac{dt}{(t^2+q^2)^n} = \frac{1}{q^{2n-1}}\int\cos^{2n-2}t\,dt$$

Règle de Bioche : Lorsque l'on cherche à calculer des primitives de la forme $\int R(\cos t,\sin t)\,dt$ où $R\in\mathbb{R}(X,Y)$,

1) Si $R(\cos t,\sin t)dt$ est invariant par $t\to\pi-t$, on pose $x=\sin t$
2) Si $R(\cos t,\sin t)dt$ est invariant par $t\to -t$, on pose $x=\cos t$
3) Si $R(\cos t,\sin t)dt$ est invariant par $t\to\pi+t$, on pose $x=\tan t$.

Ex.27

$$\int\frac{\sin^3 t}{1+\cos^2 t}\,dt \underset{x=\cos t}{=} -\int\frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx = x-2\arctan(x)+\text{cte} = \cos t - 2\arctan(\cos t)+\text{cte}$$

Lemme 28. Soit $R\in\mathbb{R}(X)$. Alors

$$\int R(e^t)\,dt \underset{x=e^t}{=} \int\frac{1}{x}R(x)\,dx$$

Ex. 29

$$\int\frac{dt}{\cosh t} = \arctan(e^t)+\text{cte}$$

Lemme 29. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ de degré $n\geq 1$. Alors

$$\int P(x)e^x\,dx = \sum_{k=1}^{n} P^{(k)}(x)\,e^x(-1)^k + \text{cte}$$

IV PROLONGEMENT EN INTEGRALES A PARAMETRE

Lemme 30
Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et $I\subset\mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Soit $f : X\times I\longrightarrow\mathbb{C}$ telle que

1) Pour μ-p.t. $x\in X$, $t\longmapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur I.
2) Pour $t\in I$, $x\longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur X.
3) Il existe $g : X\to\mathbb{R}_+$ intégrable telle que pour μ-p.t. $x\in X$

$$\forall t\in I\quad \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$$

Alors la fonction $t\longmapsto\int_X f(x,t)\,d\mu(x)$ est de classe C^1 sur I et

$$\forall t\in I,\quad \frac{d}{dt}\int_X f(x,t)\,d\mu(x) = \int_X\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,d\mu(x).$$

Ex.31 On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\pi x^2)\exp(-2i\pi x\xi)\,dx = \exp(-\pi\xi^2)\quad\text{pour } \xi\in\mathbb{R}.$$

Ex.32 On a :

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{p\to 0}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-pt}\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Ex. 33 Pour $n \geq 1$ on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!^2\, 2^{2n-2}}$$

On pose $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{t+x^2}$ et on regarde $F^{(n-1)}(1)$ après avoir calculé $F(t)$.

Th. 34 (Fubini)
Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ et $(F, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés avec μ et ν σ-finies. On note $(E \times F, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ l'espace produit.
Alors, pour $f \in L^1(E \times F)$ on a :

$$\int_{E \times F} f(x,y)\, d(\mu \otimes \nu)(x,y) = \int_E \left[\int_F f(x,y)\, d\nu(y) \right] d\mu(x)$$
$$= \int_F \left[\int_E f(x,y)\, d\mu(x) \right] d\nu(y)$$

C'est à dire que cette relation est vraie pour tout représentant de f et toutes les fonctions y sont mesurables.

Ex. 35 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe C^1 avec $f(x) \underset{+\infty}{=} O(1/x)$.
Alors $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = f(0) \log(b/a)$

Ex. 36 La fonction arctan est développable en série entière autour de 0 :
$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| < 1$$

Rq. 37 Le théorème des séries alternées assure la convergence uniforme de cette série sur $[0,1]$ et donc $\pi/4 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n/_{2n+1}$.

Ex. 38 Le volume de la boule unité $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ (euclidien) est :
$$|\mathbb{B}^n| = C_n \quad \text{où} \quad C_{n+1} = C_n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n+1} t\, dt.$$

Prop 39 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité sur lequel on considère deux v.a. indépendantes X et Y. Alors
1) La loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ de (X,Y) est donnée par $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y$
2) La fonction caractéristique φ_{X+Y} de $X+Y$ est donnée par $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$

Ex. 40 Avec les mêmes notations, si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m_x, \sigma_x^2)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m_y, \sigma_y^2)$ alors $X+Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m_x + m_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$.

V INTEGRATION NUMERIQUE

Prop. 41 (Sommes de Riemann) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et
$$\delta_n = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f \right| \quad \text{pour } n \geq 1.$$
Alors $\delta_n \to 0$. Si de plus $f \in C^1[0,1]$ alors $\delta_n = O(1/n)$.

Déf. 42
1) Une quadrature élémentaire est une forme linéaire $I_N : C^0[0,1] \to \mathbb{R}$ de la forme $I(f) = \sum_k \alpha_k f(x_k)$
2) L'ordre d'exactitude de I est le plus grand $N \geq 0$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg P \leq N$ on ait $I(P) = \int_0^1 P$.

Ex. 43 Les sommes de Riemann sont une quadrature composée à partir de $I(f) = f(0)$. Son ordre d'exactitude est $N = 0$.

Ex. 44 La méthode du point milieu correspond à la quadrature $I(f) = f(1/2)$. Son ordre d'exactitude est $N = 1$.

Prop. 45 Une quadrature à $n+1$ points est d'ordre au moins n si et seulement si elle est interpolatoire :
$$\forall f \in C^0[0,1] \quad I(f) = \int_0^1 \mathcal{L}(f)$$
où $\mathcal{L}(f) = \sum_k f(k) \prod_{j \neq k} \frac{X - x_j}{x_k - x_j}$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange.

Th. 46 (Quadrature gaussienne)
Soit $\omega :]0,1[\to \mathbb{R}$ telle que
1) $\omega \geq 0$ 2) $\int_0^1 x^n \omega(x)\, dx < +\infty$ pour $n \geq 1$ 3) Si $f \in C^0[0,1]$ et $\int_0^1 f\omega = 0$ alors $f = 0$.
Alors, pour tout $n \geq 1$, il existe une unique quadrature $I(f) = \sum_k \alpha_k f(x_k)$ à $n+1$ points d'ordre N maximal. Cet ordre est $N = 2n+1$ et les x_k sont les racines du $(n+1)$-ième polynôme de l'orthonormalisé de Gram-Schmidt de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ pour $\langle P | Q \rangle = \int_0^1 PQ\omega$. Enfin, $\alpha_k = \int_0^1 \omega(x) \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}\, dx$.

Références :
[I] Michael SPIVAK, *Calculus* 3rd ed., Cambridge University Press
[II] Elias M. STEIN & Rami SHAKARCHI, *Complex Analysis*, Princeton Lectures in Analysis II, Princeton University Press.
[III] Xavier GOURDON, *Analyse*

Fig. 1

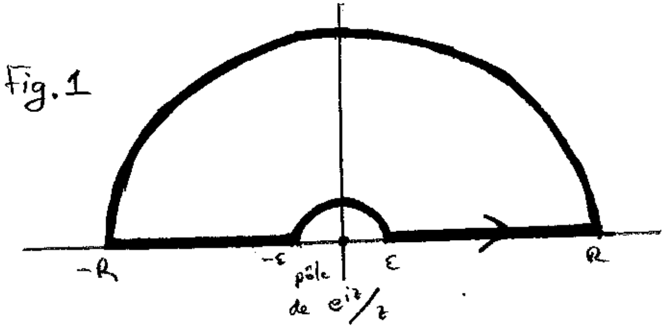

Fig. 2

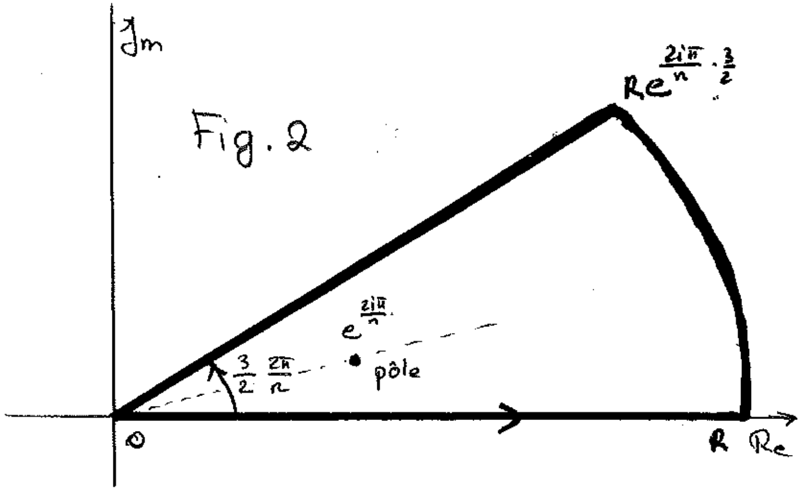

Fig. 3

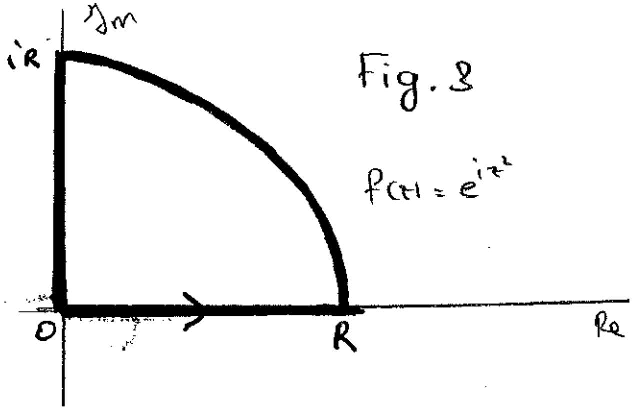

Fig. 4

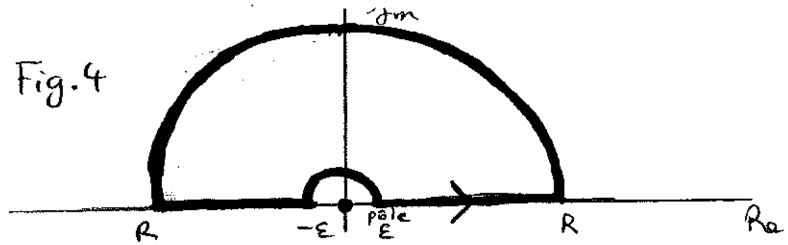

Fig. 5

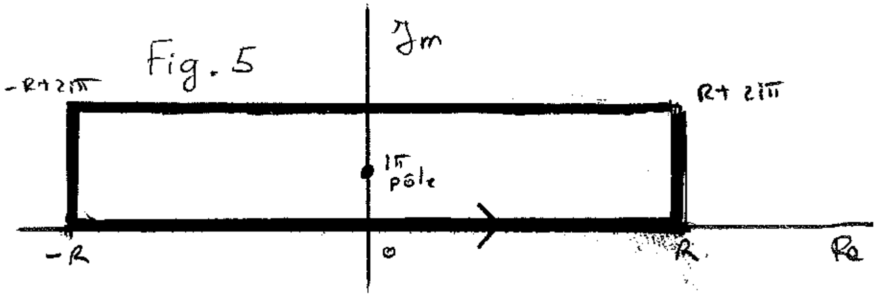

Fig. 6

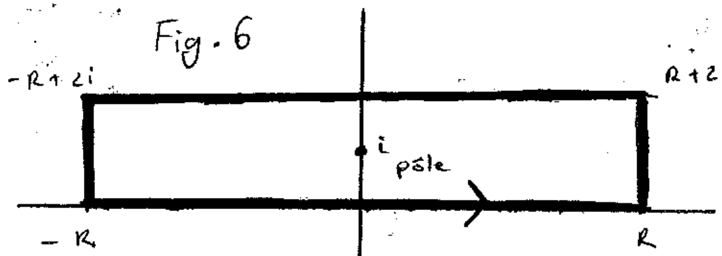

Fig. 7

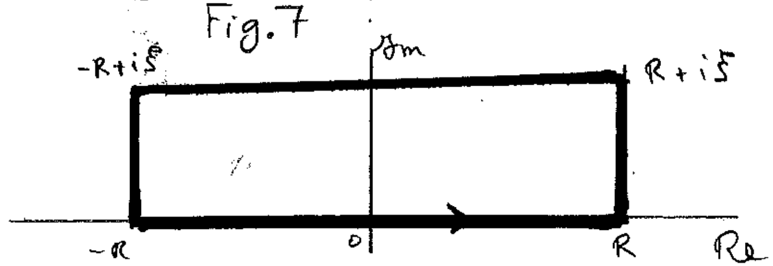

Fig. 8