236

Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales d'une fonction d'une ou plusieurs variables.

Cadre : On se place dans un espace mesuré.

I - Méthodes de calcul directes.

I.1. Pour une fonction d'une variable réelle.

A - Primitive

Thm 1 : Toute application continue $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ admet au moins une primitive F, et pour toute primitive F de f, on a $\int_a^b f(x)\,dx = [F]_a^b = F(b) - F(a)$.

Ex 2 : $\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(b) - \arctan(a)$; $\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$; $\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln b - \ln a$.
(voir Annexe A).

Ex 3 : $\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}\,dx$ (primitive d'une fraction rationnelle par décomposition en éléments simples).

Ex 4 : polynômes en sinus et cosinus : calcul de $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, avec $m, n \in \mathbb{N}$.

B - Changement de variable.

Thm 5 : $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E$ (I intervalle et E espace de Banach sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) une application continue telle que $\varphi([a,b]) \subset I$. Alors

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du.$$

Rq 6 : Seuls les changements de variable monotones ont un intérêt pratique.

Ex 7 : $\int_0^a \frac{dx}{\operatorname{ch}(x)} = \arctan(\operatorname{sh}(a))$.

Ex 8 : polynômes en sinus et cosinus.

Ex 9 : $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx = \cos x - 2\arctan(\cos x) + k$; $\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,dx = -\frac{\pi \log 2}{2}$.

C - Intégration par parties.

Thm 10 : Soient $f, g \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). La formule d'IPP s'écrit :

$$\int_a^b f g' = [fg]_a^b - \int_a^b f' g.$$

Ex 11 : $\int_0^x \arctan(u)\,du = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$; $\int_1^x \ln(u)\,du = x\ln x - x + 1$.

Ex 12 : Intégrale de Wallis : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Ex 13 : $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ avec Γ fonction Gamma.

I.2. Pour une fonction de plusieurs variables réelles.

A - Changement de variable

Thm 14 : Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ avec U mesurable, et φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V, dont le jacobien $J(\varphi)$ est borné sur U. Alors $V = \varphi(U)$ est mesurable et pour toute fonction continue et bornée $f : V \to \mathbb{R}$, on a

$$\int_V f(v)\,dv = \int_U f(\varphi(u))\,|J(\varphi)(u)|\,du, \quad \text{avec } J(\varphi)(u) = \det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(u)\right)_{1\le i,j\le n}.$$

App 15 : Passage en coordonnées polaires dans le plan :

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta, \quad (r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi].$$

Rq 16 : On peut aussi décrire le passage en coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^3$.

B - Fubini.

Thm 17 : (de Fubini) Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ des espaces mesurés. Soit $f : (X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}) \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ $\mu\otimes\nu$-intégrable, où μ et ν sont σ-finies. Alors :

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,(\mu\otimes\nu)(dx,dy) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\nu(dy)\right)\mu(dx) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mu(dx)\right)\nu(dy).$$

Ex 18 : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (Intégrale de Gauss)

App 19 : Volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$:

$$v_d = \begin{cases} \dfrac{\pi^{d/2}}{(d/2)!} & \text{si } d \text{ est pair.} \\[2ex] \dfrac{2^d\, \pi^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{d-1}{2}\right)!}{d!} & \text{si } d \text{ est impair.} \end{cases}$$

Ex 20 : $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (Intégrale de Fresnel) $\boxed{\text{DEV 1}}$ (Annexe)

II - Utilisation de la convergence et de fonctions auxiliaires.

II.1. Suites et séries de fonctions.

Thm 21 : (Beppo Levi) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\ge 1}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors $\int_X \lim_n f_n\,d\mu = \lim_n \int_X f_n\,d\mu \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

Thm 22 : (de convergence dominée) Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables vérifiant
- pour presque tout x la suite $(f_n(x))$ a une limite $(f(x))$,
- il existe une fonction positive intégrable g telle que, pour tout n et presque tout x, $|f_n(x)| \leq g(x)$

Alors la fonction f est intégrable et $\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$.

Ex 23 : $\lim_{n \to +\infty} I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} \, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$, selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Thm 24 : (Interversion série / intégrale) Soit $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions $\mathcal{A}$-mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$.
- Si les fonctions φ_n sont positives pour tout $n \geq 1$, alors $\int_X \left(\sum_{n \geq 1} \varphi_n\right) d\mu = \sum_{n \geq 1} \int_X \varphi_n \, d\mu$.
- Si $\sum_{n \geq 1} \int_X |\varphi_n| \, d\mu < +\infty$ alors les fonctions φ_n, $\sum_{n \geq 1} |\varphi_n|$ et $\sum_{n \geq 1} \varphi_n$ (définie μ-p.p.) sont μ-intégrables. En outre, $\int_X \left(\sum_{n \geq 1} \varphi_n\right) d\mu = \sum_{n \geq 1} \int_X \varphi_n \, d\mu$.

Ex 25 : Calcul de $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} \, dt$.

II. 2. Intégrales à paramètres.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré et E espace métrique. On considère $f : E \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ et on pose $F(t) = \int f(t,x) \, d\mu(x)$.

Thm 26 : (Continuité sous le signe $\int$) Supposons que :
- pour tout $t \in E$ la fonction $x \longmapsto f(t,x)$ est mesurable
- pour presque tout $x \in E$ la fonction $t \longmapsto f(t,x)$ est continue sur E,
- pour tout compact K de E il existe $g \in L^1$ positive indépendante de t telle que $|f(t,x)| \leq g(x)$, $\forall t \in K$, presque partout en x. Alors F est continue sur E.

Ex 27 : continuité de la Transformée de Fourier.

Thm 28 : (dérivation sous le signe $\int$) Ici E est un intervalle I ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que :
- pour tout $t \in I$ la fonction $x \longmapsto f(t,x)$ est dans $L^1(X)$,
- pour presque tout x, la fonction $t \longmapsto f(t,x)$ est dérivable sur I,
- pour tout compact K de I il existe une fonction $g \in L^1$ positive indépendante de t, telle que $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$, $\forall t \in K$, pour presque tout x. Alors F est dérivable sur I et

$F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) \, d\mu(x)$.

Rq 29 : Si dans le 2e point on remplace dérivable sur I par $\mathcal{C}^1$ sur I, alors la fonction F est $\mathcal{C}^1$ (et on a un résultat analogue pour les dérivées d'ordre supérieur).

Ex 30 : $x \longmapsto \Gamma(x)$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

App 31 : $\forall x \geq 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} \, dt = \arctan(x)$.

C-ex 32 : $f(x) = x^2 e^{-t|x|}$, qui est $\mathcal{C}^1$, mais $F(x) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-t|x|} \, dt = |x|$ non dérivable en 0.

Ex 33 : Intégrale de Dirichlet : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt = \frac{\pi}{2}$ (via la transformée de Laplace). **DEV 2** (Amore)

II. 3. Transformée de Fourier.

Déf 34 : On définit la transformée de Fourier d'une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$ par
$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(x) \, dx.$$

Ex 35 : $f(x) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$ $\hat{f}(t) = \frac{\sin t}{t}$; $f(x) = e^{-|x|}$ $\hat{f}(t) = \frac{2}{1+t^2}$; $f(x) = e^{-x^2}$ $\hat{f}(t) = \sqrt{\pi} \, e^{-t^2/4}$.

Prop 36 : $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f}$ sa transformée de Fourier.

(1) Si xf est intégrable, alors $\hat{f}$ est dérivable et $(\hat{f}(t))' = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} (-ixf(x)) \, dx = \widehat{-ixf}$.

(2) Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, et si sa dérivée f' est intégrable, alors $\widehat{f'}(t) = it\hat{f}(t)$.

Thm 37 : (d'inversion) Soient f intégrable et $\hat{f}$ sa transformée de Fourier. Si $\hat{f}$ est intégrable, alors pour presque tout x, $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \hat{f}(t) \, dt$.

Coro 38 : $\hat{\hat{f}}(x) = 2\pi \cdot f(-x)$.

Coro 39 : La transformation de Fourier est une application injective de $L^1(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R})$ (l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes qui tendent vers 0 à l'infini).

Ex 40 : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$.

Thm 41 : (Formule de Plancherel) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(t)|^2 \, dt.$$

Pour $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on pose $\mathcal{P}f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(t)$, appelée transformation de Fourier-Plancherel. Elle vérifie $\|\mathcal{P}f\|_2 = \|f\|_2$.

Thm 42 : (de Plancherel) La transformation de Fourier-Plancherel se prolonge en un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$.

App 43 : Transformée de Fourier de la Gaussienne + Dirichlet **DEV 3** (Erwan)

III - Analyse complexe

III.1 Théorie de Cauchy, conséquences

Thm 44 (de Cauchy) Soit Ω ouvert convexe de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$.
Si $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ est continue sur Ω, alors :
(1) f admet une primitive holomorphe sur Ω
(2) $\int_\gamma f(z)dz = 0$ pour tout γ lacet tq $\gamma^* \subset \Omega$.

Thm 45 (Principe des zéros isolés) $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert connexe
Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ non nulle, $Z(f)$ ses zéros. Alors
(1) $a \in Z(f)$, $f(z) = (z-a)^k g(z)$ avec $k \geq 1$ et $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ où $g(a) \neq 0$
(2) $Z(f)$ est au plus dénombrable, et ses points sont isolés dans Ω.

Thm 46 (Prolongement analytique) Ω connexe
Si $f = g \in \mathcal{H}(\Omega)$ sur une partie $E \subset \Omega$ ayant un point d'accumulation dans Ω, alors $f = g$ sur Ω.

App 47 $\gamma_a : x \mapsto e^{-ax^2}$, $a > 0$,
alors $\widehat{\gamma_a}(\xi) = e^{-\xi^2/4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

III.2 Résidus

Déf 48 Le résidu de f en a, noté $\mathrm{Res}(f,a)$ est le coefficient c_{-1} du développement en série de Laurent $\sum_{-m}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ de f au voisinage de a.

Thm 49 (des Résidus) Ω ouvert convexe de $\mathbb{C}$, $a_1 \dots a_n$ points 2 à 2 distincts de Ω et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$, chaque a_k est un pôle de f.
Si γ est un lacet dans Ω dont l'image ne contient aucun a_k,
alors $\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^n \mathrm{Ind}_\gamma(a_k) \, \mathrm{Res}(f, a_k)$.

Ex 50 Calcul d'intégrale : $I_\alpha := \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(1+t)} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$
pour $0 < \alpha < 1$

App 51 Formule des compléments : $\boxed{\text{DEV 4 (Erwan)}}$
$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$, $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$.

Ex 52 $\int_0^{+\infty} \mathrm{sinc}(t)dt = \pi/2$, et $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-itx}}{1+t^2} dt = \pi e^{-|x|}$

IV - Calculs approchés

IV.1 Sommes de Riemann

Déf 53 Soient $f : [a,b] \to E$ (→ Banach sur $\mathbb{K}$) bornée, $\sigma : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ une subdivision de $[a,b]$, et $\xi = (\xi_i)_i$ une famille de réels, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$
On appelle somme de Riemann de f pour (σ, ξ) l'élément $S(f,\sigma,\xi)$:
$$S(f,\sigma,\xi) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$$
Le pas de σ est $|\sigma| = \sup_{1\leq i\leq n}(x_i - x_{i-1})$.

Thm 54 Si f est intégrable, pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ tq pour toute subdivision pointée (σ, ξ) de $[a,b]$ tq $|\sigma| < \alpha$, on ait :
$$\left| \int_a^b f(x)dx - S(f,\sigma,\xi) \right| \leq \varepsilon$$

IV.2 Méthode des rectangles et des trapèzes

Méthode des rectangles : On remplace f par une fonction constante par morceaux sur chaque segment $[x_{i-1}, x_i]$, sur lesquels cette fonction vaut $f(\xi_i)$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.
Alors $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \simeq (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$
Il y a 3 cas :
- $\xi_i = x_{i-1}$ (à gauche, cas particulier de sommes de Riemann)
- $\xi_i = x_i$ (à droite)
- $\xi_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ (au milieu)

→ Voir annexe C.

App 55 $\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)dx$.

Ex 56 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln(2)$ en utilisant $f : \begin{array}{l}[0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{1+t}\end{array}$.

Méthode des trapèzes : Comme pour les rectangles, mais avec une fonction linéaire par morceaux, qui interpole f aux points x_i.
→ Voir annexe C. et $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \simeq (x_i - x_{i-1})\left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right)$.

IV.3 Méthode de Monte Carlo

Thm 57 Si $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$ où (X_i) iid alors $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{PS} \mathbb{E}(X)$.

Méthode Monte Carlo : Calcul de $I = \int_0^1 f(x)dx$ par $X = f(U)$ où $U \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$
Si $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, alors $\overline{X_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{PS} I$ où (X_i) iid $\sim X$. et $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

Variante $I = \int f(x)g(x)dx$, $f \geq 0$ et $\int f = 1$ → f est une densité de Y,
et $I = \mathbb{E}(g(Y))$ est approchée par (Y_i) iid $\sim g(Y)$: $\overline{g(Y_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} I$.

ANNEXE (A)

Primitives élémentaires, $F' = f$.

$f(x)$	$F(x)$
x^{α}, $\alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$
e^{x}	e^{x}
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$ch(x)$	$sh(x)$
$sh(x)$	$ch(x)$

ANNEXE (B)

Pour $0<\varepsilon<1<R$, $\gamma_{\varepsilon,R}$ est le contour fermé délimité par le demi-cercle $\mathcal{C}_\varepsilon := \{ |z|=\varepsilon, \operatorname{Re}(z)\leq 0\}$, les segments $I^{\pm}_{\varepsilon R} := [\pm i\varepsilon ; \pm i\varepsilon + \sqrt{R^2-\varepsilon^2}]$, et l'arc de cercle $\Gamma_{\varepsilon R} := \{ Re^{i\theta} ; \theta \in [-\pi,\pi], |\theta| \geq \theta_{\varepsilon R}\}$, où $\theta_{\varepsilon R} = \arctan\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}}\right)$.

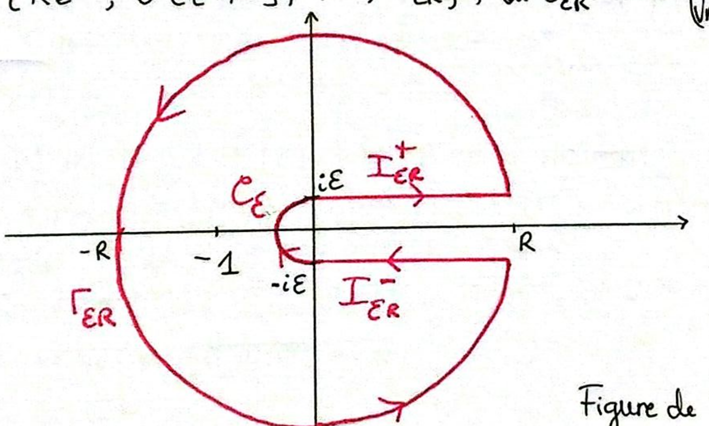
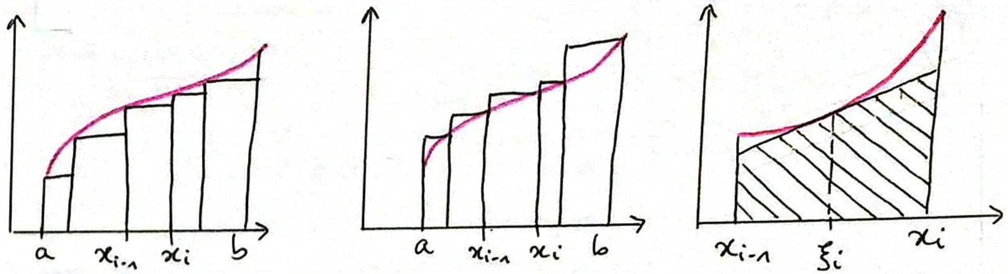


Figure de $\gamma_{\varepsilon R}$.

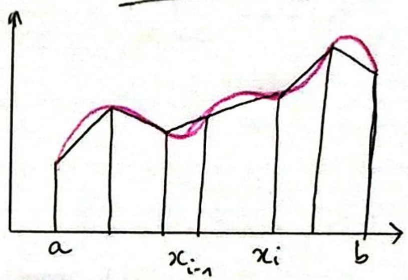
ANNEXE (C)

RECTANGLES



à gauche — à droite — au milieu

TRAPÈZES



RÉFÉRENCES

- Gourdon, Analyse ← (DEV 1)
- Briane-Pagès, Théorie de l'intégration
- Faraut, Calcul intégral
- Zuily-Queffélec, Analyse pour l'agrégation
- Queffélec Het M, Analyse complexe
- Amar-Maréthon, Analyse complexe ← (DEV 4)
- Demailly, Analyse numérique et équas diffs
- Toulouse, Thèmes de probas et stats.
- X-ENS, analyse 3 ← (DEV 2)
- Hauchecorne, contre-exemples.
- El Amrani, analyse de Fourier dans les espaces fcts. ← (DEV3 seulement)