236

Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrale de fonction d'une ou plusieurs variables

On utilisera sans discrimination l'intégrale de Riemann ou de Lebesgue, en précisant lorsqu'un calcul ne peut s'effectuer que pour l'une ou l'autre.

I] Premières méthodes

1.1) Techniques dans $\mathbb{R}$

Théorème 1 (Théorème fondamental de l'analyse) : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, et F une primitive de f. Alors
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Exemple 2 : Cela permet déjà de calculer de nombreuses intégrales :

- si $\alpha \neq 1$, $\int_a^b x^\alpha dx = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha + 1}$
- $\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln(b) - \ln(a)$ (pour $a, b \in]0, +\infty[$)
- $\int_a^b \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan(b) - \arctan(a)$
- ...

Exemple 3 : On peut utiliser la décomposition en éléments simples de fractions rationnelles : une primitive de $\frac{1}{x(x^2+1)}$ est $\ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

Proposition 4 (Intégration par parties) : Soient $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors
$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = (uv)(b) - (uv)(a) - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Exemple 5 :
$$\int_1^x \ln(t)dt = \int_1^x id_t' \ln(t)dt = x\ln(x) - x$$

Proposition 6 (Changement de variables) : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, et $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi([\alpha, \beta]) \subseteq [a, b]$. Alors
$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$
On dit qu'on a fait le changement de variable $x = \varphi(t)$.

Exemple 7 :
$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{ax+b}dx \underset{t=ax+b}{=} \int_{a\alpha+b}^{a\beta+b} \frac{1}{t}\frac{1}{a}dt$$

1.2) Intégration sur plusieurs variables

Théorème 8 (Fubini-Tonelli) : Soient (X_1, τ_1, m_1) et (X_2, τ_2, m_2) des espaces mesurés σ-finis. Soit $f : X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ positive, mesurable $/ \tau_1 \otimes \tau_2$.
Alors $x \mapsto \int_{X_2} f(x, y)\, dm_2(y)$ et $y \mapsto \int_{X_1} f(x, y)\, dm_1(x)$ sont mesurables positives, et
$$\int_{X_1 \times X_2} f(x,y)\, dm_1 \otimes m_2(x,y) = \int_{X_1}\left[\int_{X_2} f(x,y)\, dm_2(y)\right] dm_1(x) = \int_{X_2}\left[\int_{X_1} f(x,y)\, dm_1(x)\right] dm_2(y)$$

Théorème 9 (Changement de variable généralisé) : Soient U, V deux ouverts non vides de $\mathbb{R}^n$, $\varphi : U \to V$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$, $f : V \to \mathbb{R}$ mesurable.
Alors f est intégrable sur V ssi $(f \circ \varphi)|J\varphi|$ est intégrable sur U, et alors
$$\int_V f(t)\, d\lambda(t) = \int_U f(\varphi(x))\, |J\varphi(x)|\, d\lambda(x)$$
où $J\varphi(x)$ est le jacobien de φ en x.

Exemple 10 (Coordonnées polaires) : Soit $\varphi(r, \theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Alors φ est un difféomorphisme de $U =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ vers $V = \mathbb{R}^2 \setminus ([0, +\infty[\times \{0\})$.
Alors si f est intégrable sur $\mathbb{R}^2$, on a
$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dx dy = \int_U f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\lambda_2.$$

Exemple 11 (Coordonnées sphériques) : On pose $\varphi(r, \theta, \varphi) = (r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)$ le changement en coordonnées sphériques.

1.3) Intégrales impropres

Définition 12: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, avec $I = [a, b[$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si $\lim_{X \to b} \int_a^X f(x)dx$ existe (au sens de Riemann), On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)dx$ converge, et est égale à $\lim_{X \to b} \int_a^X f(x)dx$.

On fait de même pour $I =]a, b]$ ou $]a, b[$.

Définition 13: Soit f localement intégrable sur $]a, b[$. $\int_a^b f(x)dx$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(x)|dx < +\infty$
semi-convergente sinon.

Exemple 14: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+1}$ est absolument convergente
$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$ est semi-convergente.

II] Convergence et paramètre

2.1) Suites et séries de fonctions

Théorème 15 (Convergence dominée) : Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f, (f_n)_{n \geq 0}$ des fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$, telles que :
(i) presque pour tout $x \in E$, $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$
(ii) il existe $g : E \to \overline{\mathbb{R}}_+$ μ-intégrable, telle que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$|f_n(x)| \leq g(x)$ presque pour tout $x \in E$
Alors $\lim_{n \to +\infty} \int_E |f_n - f| d\mu = 0$, et $\lim_{n \to +\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$.

Exemple 16: $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^{2n}(1-x)dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$$

Théorème 17 (Interversion série-intégrale) :
Si $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des fonctions de $[a, b]$ vers un espace de Banach E, et $\sum g_n$ converge normalement vers g, alors
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b g_n(t)dt = \int_a^b g(t)\, dt.$$

2.2) Intégrale dépendant d'un paramètre

Théorème 18 (Continuité sous l'intégrale) : Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, et (X, d) métrique, avec $f : X \times E \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que
(i) presque pour tout $t \in E$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue
(ii) pour tout $x \in X$, $t \mapsto f(x,t)$ est mesurable
(iii) il existe $g : E \to \overline{\mathbb{R}}_+$ μ-intégrable telle que $\forall x \in X$, presque $\forall t \in E$, $|f(x,t)| \leq g(t)$
Alors $F : x \mapsto \int_E f(x,t)\, d\mu(t)$ existe et est continue en tout x de X.

Théorème 19 (Dérivabilité sous l'intégrale) : Soit E défini comme ci-dessus, I intervalle (ouvert) de $\mathbb{R}$ et $f : I \times E \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que
(i) presque pour tout $t \in E$, $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable, de dérivée $\partial_1 f(x,t)$
(ii) pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est μ-intégrable
(iii) $\exists g : E \to \overline{\mathbb{R}}_+$ μ-intégrable telle que $\forall x \in I$, presque $\forall t \in E$, $|\partial_1 f(x,t)| \leq g(t)$
Alors $\forall x \in I$, $t \mapsto \partial_1 f(x,t)$ est intégrable, et $F(x) := \int_E f(x,t)dt$ est dérivable, de dérivée
$F'(x) = \int_E \partial_1 f(x,t)\, dt$.

Exemple 20 (fonction caractéristique de la gaussienne) :
Si $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{itx} dt = e^{-x^2/2}$.

III.] Intégration complexe

3.1) Chemins dans $\mathbb{C}$

Définition 21: Soit $\gamma : I \to \mathbb{C}$ $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Soit f continue sur $\mathrm{Im}(\gamma)$. On définit alors
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_I f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

Définition 22: Si γ est un chemin fermé, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$,
$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) := \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} \times \frac{1}{2i\pi}$$

Théorème 23 (Théorème de Cauchy) : Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}$, γ chemin fermé de Ω et f holomorphe sur Ω. Alors $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Exemple 24: $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\,dx = \frac{\pi}{n} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \qquad (n \geq 2)$$

Proposition 25 (Formule de Cauchy) : Soit Ω ouvert convexe de $\mathbb{C}$, γ chemin fermé de Ω et f holomorphe sur Ω. Si $z \in \Omega \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$, on a
$$f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$$

3.2) Théorème des résidus

Définition 26: Soit f méromorphe sur Ω, a un pôle de f ; alors $\exists! m, c_1 \cdots c_m$ tels que $f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$ se prolonge de manière holomorphe en a.
On note $\mathrm{Res}_a(f) := c_1$ le résidu de f en a.

Théorème 27 (des résidus) : Soit Ω ouvert simplement connexe, f méromorphe sur Ω, A les pôles de f, et γ un chemin fermé de $\Omega \setminus A$. Alors
$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{a \in A} \mathrm{Res}_a(f)\,\mathrm{Ind}_\gamma(a)$$

DEV 1

Application 28 (Formule des compléments)
$\forall z \in \mathbb{C}$, ~~$\Gamma(z)\Gamma(z-1)$~~
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

IV.] Transformation de Fourier

Définition 29: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$; on définit sa transformée de Fourier par $\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x)\,dx$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Théorème 30: Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ est continue et tend vers 0 en $+$ et $-\infty$.

Définition 31: On introduit l'espace de Schwartz :
$$S(\mathbb{R}) = \{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall p,q \in \mathbb{N},\ \exists C_{p,q} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x^p f^{(q)}(x)| \leq C_{p,q} \}$$

DEV 2

Théorème 32 : Si $f \in S(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$.

Théorème 33 : Si $f \in S(\mathbb{R})$, on a
$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \hat{f}(t)\,dt \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

~~Application 34.~~

Théorème 34 : Si $f, g \in S(\mathbb{R})$, alors
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) g(x)\,dx$$

Corollaire 35 : Si $f \in S(\mathbb{R})$,
$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(t)|^2\,dt$$

Application 36 : Soit $\varphi \in S(\mathbb{R})$, $a \in]0,+\infty[$.
Alors $\forall \xi \in \mathbb{R}$,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{a - 2i\pi x} e^{-2i\pi \xi x}\,dx = e^{-a\xi} \int_{-\infty}^{\xi} e^{as} \hat{\varphi}(s)\,ds$$