239

Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et Applications.

Soit (X,μ) espace mesuré et E espace métrique

On cherche à étudier $F(t)=\int_X f(x,t)\,dx$ avec $f : X\times E \to \mathbb{C}$

I Régularité

1) Continuité [ZQ]

Th : Si (i) $\forall t\in E$, $x\mapsto f(x,t)$ est mesurable

(ii) pour presque tout $x\in X$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue

(iii) $\exists g\in L^1$ telle que : $\forall t\in E$, $|f(x,t)|\leq g(x)$ presque partout en x

Alors F est continue sur E.

Th : (semi-convergence) $X=[a,b[$, $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$

Si pour tout compact K de E, $\int_a^y f(x,t)\,dx \xrightarrow[y\to b]{} F(t)$ uniformément sur K

Alors F est continue sur E

Exemple : La fonction $F(t)=\int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx$ est continue sur $[0;+\infty[$

Contre-Exemple : $f : [0;+\infty[\times[0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $(x,t)\mapsto te^{-xt}$ est continue mais

$F(t)=\int_0^{+\infty} te^{-xt}\,dx$ n'est pas continue en 0. [HAO]

2) Dérivabilité [ZQ]

Dans ce paragraphe, $E=I$ un intervalle de $\mathbb{R}$

Th : Si (i) $\forall t\in I$, $x\mapsto f(x,t)\in L^1(X)$

(ii) $\exists N\subset X$, $\mu(N)=0$ et $\forall x\notin N$, $t\mapsto f(x,t)$ est dérivable

(iii) $\forall K\subset I$, K compact, il existe $g\in L^1$ telle que $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right|\leq g(x)$ $\forall t\in K$, $\forall x\notin N$

Alors (i) $\forall t\in I$, $x\mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\in L^1(X)$

(ii) F est dérivable sur I et $F'(t)=\int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$

Th : (semi-convergence) $X=[a,b[$, $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$

Si (i) $\forall (x,t)\in[a,b[\times I$, $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ existe et $(x,t)\mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ est continue

(ii) $\forall t\in I$, $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$ est convergente

(iii) $\forall K$ compact de I, $\int_a^y \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx \xrightarrow[y\to b]{} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$ uniformément sur K

Alors F est dérivable sur I et $F'(t)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$

Exemple : La fonction $F(t)=\int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx$ est C^1 sur $]0;+\infty[$

Contre-Exemple : $f : [0;+\infty[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(x,t)\mapsto t^2e^{-x|t|}$ est C^1 mais

$F(t)=\int_0^{+\infty} t^2e^{-x|t|}\,dx$ n'est pas dérivable [HAO]

Application : Calcul de $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$

3) Holomorphie [ZQ]

Dans ce paragraphe, $E=\omega$ un ouvert de $\mathbb{C}$.

Th. Si (i) $\forall z\in\omega$, $x\mapsto f(x,z)\in L^1(X)$

(ii) $\exists N\subset X$, $\mu(N)=0$ et $\forall x\notin N$, $z\mapsto f(x,z)$ est holomorphe

(iii) $\forall K$ compact de ω, $\exists g\in L^1(X)$ telle que $|f(z,x)|\leq g(x)$ $\forall z\in K$, $\forall x\notin N$

Alors F est holomorphe sur ω et $F'(z)=\int_X \frac{\partial f}{\partial z}(x,z)\,dx$.

Th : (semi-convergence) $X=[a,b[$, $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$

Si (i) $\forall x\in[a,b[$, $z\mapsto f(x,z)$ est holomorphe et $(x,z)\mapsto\frac{\partial f}{\partial z}(x,z)$ est continue

(ii) $\forall z\in\omega$, $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(x,z)\,dx$ est convergente

(iii) $\forall K$ compact de ω, $\int_a^y \frac{\partial f}{\partial z}(x,z)\,dx \xrightarrow[y\to b]{} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(x,z)\,dx$ uniformément sur K

Alors F est holomorphe sur ω et $F'(z)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(x,z)\,dx$

Applications : La fonction $\Gamma : x\mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ admet un unique prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{-\mathbb{N}\}$ (DEV 1) [OA].

II Convolution

1) Définition et premières propriétés [BRE]

Def/Th : Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p, q \leq +\infty$.
Si f ou $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors pour presque tout x, l'intégrale suivante a un sens et définie une fonction $f*g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ (ou $L^q(\mathbb{R}^n)$) :

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

et $\|f*g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$ ou $\|f*g\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^q} \|g\|_{L^1}$

Rq : $f*g = g*f$

Exemples / Applications : On note $e_n : t \mapsto e^{int}$ [ZQ]

- $D_N = \sum_{-N}^{N} e_n$ noyau de Dirichlet
- $K_N = \frac{1}{N} \sum_{0}^{N-1} D_N$ noyau de Féjer

Th : (de Féjer)
Si $f \in C^0$, $\|K_N * f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $\|K_N * f - f\|_\infty \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$
Si $f \in L^p$, $\|K_N * f\|_p \leq \|f\|_p$ et $\|K_N * f - f\|_p \longrightarrow 0$ $(1 \leq p < +\infty)$

Conséquence : (Théorème de Weierstrass) [ZQ]
Toute fonction continue sur $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques

Prop :
- $\mathrm{Supp}(f*g) \subset \overline{\mathrm{Supp}\, f + \mathrm{Supp}\, g}$
- Si $\mathrm{Supp}\, f$ (ou $\mathrm{Supp}\, g$) est compact alors $\mathrm{Supp}(f*g) \subset \mathrm{Supp}\, f + \mathrm{Supp}\, g$
- f et g à support compact $\Rightarrow$ $f*g$ à support compact

Prop : Si $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, alors $f*g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ et $D^\alpha(f*g) = (D^\alpha f)*g$ $\forall |\alpha| \leq k$

2) Suites régularisantes [BRE] p 70-71

def : $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite régularisante si :
- $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\forall n$
- $\rho_n \geq 0$
- $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_n = 1$
- $\mathrm{Supp}(\rho_n) \subset B(0, \frac{1}{n})$

Ex : $\rho(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$

$\rho_n(x) = \dfrac{n^N \rho(nx)}{\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\, dx}$ (ρ_n) est une suite régularisante

Th : Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < +\infty$, alors $\rho_n * f \xrightarrow[n \to +\infty]{L^p} f$

Application 1 : Ω ouvert dense de $\mathbb{R}^N$, $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans L^p pour $1 \leq p < +\infty$

Application 2 : (Théorème de Riesz - Fréchet - Kolmogorov) [BRE p 72]
Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$ et ω ouvert tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$
$\mathcal{F}$ sous-ensemble borné de L^p, $1 \leq p < +\infty$
Si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\delta < \mathrm{dist}(\omega, \Omega^c)$ tel que

$$\|f(h+\cdot) - f\|_{L^p} < \varepsilon \quad \forall |h| < \delta,\ \forall f \in \mathcal{F}$$

Alors $\mathcal{F}_{|\omega}$ est relativement compacte dans L^p

Application 3 : (Équation de la chaleur) [OA p 118]

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = 2 \frac{\partial y}{\partial t}(x,t)$, $y : \mathbb{R} \times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$

La fonction $G_t : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$ est solution et si f est continue bornée alors $F(x,t) = (f * G_t)(x)$ est aussi solution.

III Transformée de Fourier [ZQ]

def : On définit l'espace de Schwartz S par :

$$S = \{ f \in C^\infty \ /\ \forall p, q \in \mathbb{N},\ \exists C_{p,q} \quad |x^p f^{(q)}(x)| \leq C_{p,q} \ \forall x \}$$

def/Th : L'application suivante est bien définie

$$\mathcal{F} : S \longrightarrow S$$
$$f \longmapsto \hat{f} : t \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-itx}\, dx$$

on l'appelle transformée de Fourier

Prop : Si $f \in S$, alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: [RUD]
(i) $g : x \mapsto f(x) e^{i\alpha x} \in S$ et $\hat{g}(t) = \hat{f}(t - \alpha)$
(ii) $g : x \mapsto f(x - \alpha) \in S$ et $\hat{g}(t) = \hat{f}(t) e^{-i\alpha t}$

Prop : Si $f, g \in S$, alors $f*g \in S$ et $\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}$

Prop : $\hat{f}^{(q)}(t) = \int_{\mathbb{R}} (-ix)^q f(x) e^{-itx}\, dx \quad \forall q \in \mathbb{N}$

Ex : Soit $f : x \mapsto e^{-x^2}$ une gaussienne
Alors $f \in S$ et $\hat{f}(t) = \sqrt{\pi}\, e^{-t^2/4}$

Th : (Formule d'inversion)

Si $f \in \mathcal{S}$, alors $f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\hat{f}(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Cor : $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}$

Rq : On peut montrer de plus que $\mathcal{F}$ est un homéomorphisme de $\mathcal{S}$

Application :

Pour X variable aléatoire réelle, on définit la fonction caractéristique φ_X par : $\varphi_X(t) = E(e^{itX})$.

φ_X caractérise la loi : $P_X = P_Y \Leftrightarrow \varphi_X = \varphi_Y$

Prop : Si $\varphi_X \in L^1$, X a une densité f donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \varphi_X(t)\, e^{-itx}\,dt$$

Th : (Parseval)

Si $f, g \in \mathcal{S}$, alors $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\hat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\,g(t)\,dt$

IV Etude asymptotique

1) Méthode de Laplace [ZQ]

But : Etudier le comportement de $F(t) = \int_a^b e^{t\varphi(x)} f(x)\,dx$, pour φ à valeurs réelles, lorsque $t \to +\infty$.

Th : $I =]a,b[$ intervalle borné ou non. Soit $\varphi \in C^2(I,\mathbb{R})$ et $f \in C^0(I,\mathbb{C})$

Si (i) $\forall t > 0$, $\int_a^b e^{t\varphi(x)} |f(x)|\,dx < +\infty$

(ii) φ' s'annule en un seul point x_0 de I et $\varphi''(x_0) < 0$

(iii) $f(x_0) \neq 0$

Alors $F(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|\varphi''(x_0)|}}\, e^{t\varphi(x_0)} f(x_0)\, t^{-1/2}$

Application : (Formule de Stirling)

- $\Gamma(t+1) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, t^{t+1/2} e^{-t}$; $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$

2) Phase Stationnaire [ZQ]

But : Etudier le comportement de $F(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\varphi(x)} f(x)\,dx$, pour φ à valeurs réelles, lorsque $t \to +\infty$

Th : Si $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et φ' ne s'annule pas et $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

Alors F est à décroissance rapide à l'infini :

$\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists C_N > 0$, $|F(t)| \leq C_N t^{-N} \quad \forall t \geq 1$

Application : (Fonction d'Airy)

$$Ai(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx + i\frac{x^3}{3}}\,dx \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$\to$ Ai est à décroissance rapide pour $t \to +\infty$

Th : Si $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Si de plus il existe un unique point x_0 du support de f tel que $\varphi'(x_0) = 0$ et $\varphi''(x_0) \neq 0$ et $f(x_0) \neq 0$

Alors $F(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{A_0}{\sqrt{t}}$

avec $A_0 = e^{it\varphi(x_0)} \dfrac{\sqrt{2\pi}\, e^{i(\operatorname{sign}\varphi''(x_0))\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{|\varphi''(x_0)|}} f(x_0)$

Rq : La méthode du col est une généralisation de ces deux méthodes et permet de donner un équivalent des intégrales de la forme $F(t) = \int_\gamma e^{t f(z)} g(z)\,dz$, lorsque $t \to +\infty$.

Avec γ un chemin d'extrémité a et b dans le plan complexe et f et g fonctions holomorphes. [ROU] p403

Références :

[ZQ] Zuily-Queffélec, Eléments d'analyse

[HAU] Hauchecorne

[BRE] Brezis, Analyse Fonctionnelle

[ROU] Rouvière

[OA] objectif agrégation