239 Intégrale à paramètre.

Motivation : Certaines fonctions ne se représentent que sous forme d'une intégrale à paramètre.

I Régularité et théorie de Lebesgue [ZQ]

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ espace mesuré. $C = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}$. On considère $f : X \times C \to \mathbb{C}$ telle que $\forall t \in C$, $x \mapsto f(x,t)$ mesurable. On étudie $F(t) = \int_X f(x,t) d\mu(x)$

A - Continuité

théo 1. Si $\bullet\ \forall t \in C$, $x \mapsto f(x,t)$ est mesurable

- $t \mapsto f(x,t)$ est continue $\mu(dx)$ - pp
- $\forall K$ compact de C, $\exists g_K \in L^1$, $g_K \geq 0$, telle que : $\forall t \in K$, $|f(x,t)| \leq g_K(x)$, $\mu(dx)$ - pp

Alors F est définie et continue sur C.

Ex :
- $f \in L^1$, alors $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto te^{-xt}$ est continue, mais $F(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ n'est pas continue en 0.

B - Dérivabilité

théo 2 C ouvert de $\mathbb{R}^n$. $k \in \mathbb{N}$. On suppose que :

- $\forall t \in C$, $x \mapsto f(x,t) \in L^1$
- $t \mapsto f(x,t) \in C^k(C)$ $\mu(dx)$ - pp
- $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq k$, $\forall K$ compact de C, $\exists g_{\alpha,k} \in L^1$, $g_{\alpha,k} \geq 0$ telle que : $|D^\alpha f(x,t)| \leq g_{\alpha,k}(x)$ $\forall t \in C$, $\mu(dx)$ - pp

Alors :
- $\forall t \in C$, $|\alpha| \leq k$, $x \mapsto D^\alpha f(x,t) \in L^1$
- $F \in \mathcal{C}^k(C)$ et $D^\alpha F(t) = \int D^\alpha f(x,t) d\mu(x)$

Ex :
- $t \mapsto \int_0^\infty e^{-xt} \frac{\sin x}{x} dx$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto t^2 e^{-x|t|}$ est C^1 mais F n'est pas dérivable en 0

C - Holomorphie

théo 3 Ω ouvert de $\mathbb{C}$. $f : X \times \Omega \to \mathbb{C}$ telle que :

- $\forall z \in \Omega$, $x \mapsto f(x,z) \in L^1$
- $z \mapsto f(x,z)$ est holomorphe sur Ω $\mu(dx)$ - pp
- $\forall K$ compact de Ω, $\exists g \geq 0$, $g \in L^1 \setminus |f(x,z)| \leq g(x)$, $\forall z \in \Omega$

Alors : F est holomorphe et $F'(z) = \int_X \partial f/\partial z(x,z) d\mu(x)$

Ex : $\Gamma : z \mapsto \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ est holomorphe sur $\{Re(z) > 0\}$

$\zeta : z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ est holomorphe sur $\{Re\, z > 1\}$

Application : Problème de Dirichlet sur le disque unité $\Omega = D(0,1)$.

[DEV] **Théo.** Soit $f : \partial\Omega \to \mathbb{C}$ continue. Alors il existe une unique application continue $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ telle que $u|_\Omega$ soit de classe C^2 et : $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{sur } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$

II Intégrales semi-convergentes.

- Ou bien : on arrive à se ramener à une intégrale absolument cvg^te par une IPP. ex : $Ai(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx + ix^3/3} dx$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$.
- Ou bien : on étudie $\int_a^b$ $\alpha < a < b < \beta$ par les théorèmes élémentaires puis on fait $a \to \alpha$ et $b \to \beta$ en cherchant une cvgce uniforme.

théo 4 : (Abel) $f \geq 0$ sur $[a,b[$ et g complexe sur $[a,b[$

Si : $\begin{cases} f \text{ est décroissante sur } [a,b[\text{ et } f(x) \xrightarrow[x \to b]{} 0 \\ g \text{ est continue sur } [a,b[\text{ et } \exists M > 0 \setminus |\int_a^x g(t)dt| \leq M\ \forall x < b \end{cases}$

Alors : $\int_a^b f(x)g(x)dx$ est convergente et $|\int_a^b f(x)g(x)dx| \leq Mf(a)$

Rq : Le théo 4 résulte de la seconde inégalité de la moyenne.

Il peut être utile pour montrer la convergence uniforme des intégrales.

f continue de $E \times [a,b[$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\int_a^b f(x,t) dx$ converge. ($\forall t \in E$)

On pose $F(t) = \int_a^b f(t,x) dx$

théo 5. (continuité) Si pour tout compact K de E, $\int_a^X f(t,x)dx$ converge uniformément vers $F(t)$, lorsque $X \to b$, sur K.

Alors $t \mapsto F(t)$ est continue sur E.

Ex :
- $x \mapsto \int_0^\infty e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

  Appli : $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \pi/2$
- $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ décroissante. Alors $F(t) = \int_1^\infty e^{itx^2} f(x) dx$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

théo 6 (Dérivabilité) $f : I \times [a,b[\to \mathbb{C}$ telle que :

- $\forall (t,x) \in I \times [a,b[$, $\partial f/\partial t(t,x)$ existe et $(t,x) \in I \times [a,b[\to \partial f/\partial t(t,x)$ continue
- $\forall t \in I$, $\int_a^b \partial f/\partial t(t,x) dx$ est convergente
- $\forall K$ compact de I, $\int_a^X \partial f/\partial t(x,t) dx \xrightarrow[X \to b]{\text{cvu sur } K} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) dx$

Alors F est dérivable sur I et $F'(t) = \int_a^b \partial f/\partial t(t,x) dx$

Théo 7. (Holomorphie) $f : \Omega \times [a,b[\to \mathbb{C}$ avec Ω ouvert de $\mathbb{C}$

On suppose :

- $\forall x \in [a,b[$, $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe dans Ω et $\Omega\times[a,b[\to \mathbb{C}$, $(z,x) \mapsto \partial f/\partial z\,(z,x)$ est continue
- $\forall z \in \Omega$, $\int_a^b \partial f/\partial z\,(z,x)\,dx$ est convergente.
- $\forall K$ compact de Ω, $\int_a^x \partial f/\partial z\,(z,x)\,dx \xrightarrow[x\to b]{\text{cv sur } K} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(z,x)\,dx$

Alors : $z \mapsto F(z)$ est holomorphe avec $F'(z) = \int_a^b \partial f/\partial z\,(z,x)\,dx$

Rq : Tous les théorèmes précédents ne sont que des conditions suffisantes à une quelconque régularité des intégrales à paramètre.

Ex : $F : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+t^2}\,dt$ est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}^*$ d'après le théorème de continuité et de dérivabilité. Sous forme intégrale, on ne peut dire plus. Or $F(x) = \pi e^{-|x|}$ est en fait C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

Ex2 : $F(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,dt$ est dérivable en 0 avec $F'(0) = -1$ mais $\int_0^\infty \sin t\,dt$ n'a pas de sens.

III Convolution [BAE]

A_ Définitions et premières propriétés

Théo 8 (Théo-déf)(Convolution) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $p \in [1,+\infty]$

Alors $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$ $\lambda(dx)$ pp.

On pose $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy$

Alors : $f*g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $\|f*g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}$

Prop 9 : $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Alors $f*g \in C(\mathbb{R}^N)$

Prop 10 : $f \in C^k_c(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Alors $f*g \in C^k(\mathbb{R}^N)$ et $D^\alpha(f*g) = D^\alpha f * g$

B_ Suites régularisantes

Déf. (suite régularisante) On appelle suite régularisante toute suite (ρ_n) de fonctions telles que : $\rho_n \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N)$, $\operatorname{Supp}\rho_n \subset B(0,1/n)$, $\rho_n \ge 0$, $\int \rho_n = 1$

Ex : $\rho \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N)$ tq supp $\subset B(0,1)$, $\rho \ge 0$, $\int\rho > 0$.

Alors $\rho_n(x) = 1/\int\rho \times n^N \rho(nx)$ forme une suite régularisante

Prop 11 : $f \in C(\mathbb{R}^N)$. Alors $\rho_n * f \xrightarrow[n\to\infty]{\text{cv sur tt cpct}} f$

Théo 12 : $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \le p < +\infty$. Alors $\rho_n * f \xrightarrow{L^p} f$

Cor : $C^\infty_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert.

Convolution dans $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$:

Déf. (Noyau trigonométrique). On appelle noyau trigonométrique toute suite (k_n) de fonctions 2π-périodiques telle que : • $1/2\pi \int k_n(t)\,dt = 1$

• $1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} |k_n(t)|\,dt \le C$ • $\forall \delta \in]0,\pi[$ $\int_\delta^{2\pi-\delta} |k_n(t)|\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Ex. • On note $D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int}$ le "noyau" de Dirichlet.

Alors $\sigma_N(t) = \sum_{k=0}^{N} D_k(t) \times \frac{1}{N+1}$ est un noyau (noyau de Fejer)

• Noyau de Poisson : $0 \le r < 1$, $P(r,t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} r^{|j|} e^{ijt}$

Théo 13. $f \in L^p(\mathbb{T})$ et $\{k_n\}$ noyau trigonométrique. $1 \le p < \infty$

Alors : $k_n * f \xrightarrow{L^p} f$

Théo 14 : $f \in C^0_{2\pi}$, alors $k_n * f \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$

Application : $\forall f$ continue et 2π périodique $\sigma_n(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$

Théo (Weierstrass) : toute fonction continue et 2π-périodique est limite uniforme de polynômes trigo.

IV Transformée de Fourier [ZQ]

$f \in L^1(\mathbb{R})$. $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-itx} f(x) \in L^1$ et note $\hat f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-itx}\,dx$ la transformée de Fourier de f

Ex : $g_a(t) = e^{-at^2}$ ($\operatorname{Re}(a) > 0$) alors $\hat g_a(t) = \sqrt{\pi/a}\, e^{-t^2/4a}$

Prop. $f \in L^1 \Rightarrow \hat f$ est continue et $\hat f(t) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0$ (Riemann-Lebesgue)

Déf. (Espace de Schwartz)

$S = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}),\ \forall p,q \in \mathbb{N}\ \exists C_{p,q} > 0 \mid |x^p f^{(q)}(x)| \le C_{p,q}\ \forall x \in \mathbb{R} \}$

Rq : $S \ne \emptyset$ car $x \mapsto e^{-x^2} \in S$

[DEV] **Théo 15 :** La transformée de Fourier est une application linéaire de S dans S. Elle est même bicontinue d'inverse :

$\mathcal{F}^{-1}(v)(x) = 1/2\pi \int_{\mathbb{R}} e^{itx} v(t)\,dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Appli : Résolution d'équations aux dérivées partielles.

$f \in S$. Alors $\exists! u \in S \backslash$ $\begin{cases} \Delta u - \partial_t u = 0 \\ u(x,t=0) = f(x) \end{cases}$

prop

Transformées de Fourier appliquées aux probabilités [OUV]

Déf: μ mesure bornée sur $\mathbb{R}^d$ muni de sa tribu borélienne. X une va définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeur dans $\mathbb{R}^d$.
On appelle transformée de Fourier de μ l'application $\hat{\mu}$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$ telle que: $\forall t\in\mathbb{R}^d$, $\hat{\mu}(t)=\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,t\rangle}\,d\mu(x)$

Déf (Fonction caractéristique) on appelle fonction caractéristique de X la transformée de Fourier de P_X.

Rq: $\forall t\in\mathbb{R}^d$, $\varphi_X(t)=E[e^{i\langle X,t\rangle}]$

théo16 Deux mesures bornées sur $\mathbb{R}^d$ qui ont même transformée de Fourier sont égales

Rq: théo 16 $\Rightarrow$ φ_X caractérise entièrement la loi de X

Prop. μ mesure bornée de $\mathbb{R}^d$ telle que $\hat{\mu}\in L^1$. Alors μ est abs. continue par rapport à la mesure de Lebesgue et sa densité est donnée λ_d-pp par h: $\forall x\in\mathbb{R}^d$, $h(x)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\hat{\mu}(t)e^{-i\langle x,t\rangle}\,dt$

Application à l'indépendance:

prop μ_1,μ_2 2 mesures bornées sur $\mathbb{R}^{d_1}$ et $\mathbb{R}^{d_2}$ respectivement. Alors $\forall(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$, $\widehat{\mu_1\otimes\mu_2}(t_1,t_2)=\hat{\mu}_1(t_1)\hat{\mu}_2(t_2)$

Cor (Critère d'indépendance). Soit $(X_1,X_2)=X$ une va sur $\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$.
$X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \iff \forall(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$, $\varphi_{(X_1,X_2)}(t_1,t_2)=\varphi_{X_1}(t_1)\varphi_{X_2}(t_2)$

prop μ_1,μ_2 bornées sur $\mathbb{R}^d$. Alors $\widehat{\mu_1*\mu_2}=\hat{\mu}_1\cdot\hat{\mu}_2$

Cor. $X_1\perp\!\!\!\perp X_2 \Rightarrow \varphi_{X_1+X_2}(t)=\varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t)$

Appli: Calcul de la loi d'une somme finie de va indépendantes

Application à la convergence en Loi

théo17 (Levy) (X_n) suite de va. φ_{X_n} les fonctions caractéristiques associées. Alors:

- $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Rightarrow \varphi_{X_n}\xrightarrow[cs]{}\varphi_X$
- $\varphi_{X_n}\xrightarrow[cs]{}\varphi$ avec φ continue en $0 \Rightarrow \exists\mu \mid \varphi=\hat{\mu}$ et $X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}\mu$

IV Etude asymptotique. [ZQ]

prop $[a,b[$ avec $-\infty<a<b\leq+\infty$. E banach. $f:[a,b[\to E$ et $g:[a,b[\to\mathbb{R}_+^*$ C^0/m. Alors

- si $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge: $f=\begin{cases}O\\o\\\sim\end{cases}(g)\Rightarrow\int_a^x f(t)\,dt=\begin{cases}O(\int_a^x g(t)dt)\\o(\int_a^x g(t)dt)\\\sim\int_a^x g(t)dt\end{cases}$
- Si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge: $f=\begin{cases}O(g)\\o(g)\\\sim g\end{cases}\Rightarrow\int_x^b f(t)\,dt=\begin{cases}O(\int_x^b g(t)dt)\\o(\int_x^b g(t)dt)\\\sim\int_x^b g(t)dt\end{cases}$

Ex: $Li(x)=\int_2^x\frac{dt}{\ln t}$

Alors $Li(x)=\frac{x}{\ln x}+\dots+\frac{n!\,x}{\ln^{n+1}x}+o\left(\frac{x}{\ln^{n+1}x}\right)$

Méthode de Laplace:

théo 18 (Laplace) $g,h\in C^2$ sur $]a,b[$ tq

- $x\mapsto g(x)e^{th(x)}$ intégrable sur $]a,b[$
- $\exists!\,c\in]a,b[\ \backslash\ \max h=h(c)$, $h''(c)<0$, $g(c)\neq0$

Alors $\int_a^b g(x)\exp(th(x))\,dx\underset{t\to\infty}{\sim}\sqrt{\frac{2\pi}{-th''(c)}}\,g(c)e^{th(c)}$

Ex: $\Gamma(x+1)=\int_0^\infty e^{x\ln t-t}\,dt\sim\sqrt{2\pi}\,x^{x+1/2}e^{-x}$

Méthode de la phase stationnaire.

Supposons $\begin{cases}\varphi\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})\\a\in C_c^\infty(\mathbb{R})\end{cases}$

théo18 Si $\varphi'(x)\neq0$, $\forall x\in Supp(a)$, alors $\forall N\in\mathbb{N}$, $\exists C_N>0$
$|F(t)|\leq C_N t^{-N}$ pr $t\geq1$

théo 19: Si $\exists!\,x_0\in Supp(a)\ \backslash\ \varphi'(x_0)=0$ et $\varphi''(x_0)\neq0$ Alors:
$\exists(A_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\ \backslash\ \forall N\in\mathbb{N}$, $F(t)=e^{it\varphi(0)}\sum_{n=0}^N A_n t^{-n-1/2}+R_N(t)$ $(t\geq1)$
avec $A_0=\sqrt{\frac{2\pi}{|\varphi''(x_0)|}}\,a(x_0)$ et $|R_N(t)|\leq C_N t^{-N-3/2}$

Rq: En particulier $F(t)\sim A_0/\sqrt{t}$ si $a(x_0)\neq0$

Application: Fonction d'Airy: $Ai(t)=\int_{\mathbb{R}}e^{itx+ix^3/3}\,dx$, $t\in\mathbb{R}$
Ai est C^∞ sur $\mathbb{R}$, de plus:

théo:
- $Ai(t)$ est à décroissance rapide pr $t\to+\infty$
- $Ai(t)\underset{t\to-\infty}{=}2\sqrt{\pi}\,|t|^{-1/4}\cos\left(\frac{2}{3}|t|^{3/2}-\pi/4\right)+O(|t|^{-7/4})$