239. Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Soit (X,μ) un espace mesuré, soit (E,d) un espace métrique.
On cherche à étudier $F : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{C} \\ a \longmapsto \int_X f(a,x)\mu(dx) \end{array}$ où $f : E\times X \to \mathbb{C}$

I Régularité _ Cadre général [B-P], [Marco]

A Continuité

Théorème 1. Soit $a_0 \in E$. Si l'on a :
(i) $\forall a \in E$, $x \mapsto f(a,x)$ est mesurable
(ii) $\mu(dx)$ p.p. $a \mapsto f(a,x)$ est continue en a_0
(iii) $\exists g \in L^1$ tq $\forall a \in E$, $|f(a,x)| \leq g(x)$ $\mu(dx)$ p.p.

Alors $F : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{C} \\ a \longmapsto \int_X f(a,x)\mu(dx) \end{array}$ est bien définie, et continue en a_0.

Ex : • Si $f \in L^1$, $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ a \longmapsto \int_0^a f(x)\,dx \end{array}$ est continue en tout point.

• Si $f \in L^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, $\mathcal{L}(f) : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tx} f(t)\,dt \end{array}$ est définie et continue en tout point

[Transformée de Laplace]

B Dérivabilité (Sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$)

Théorème 2. Soit $a_0 \in I$. Si l'on a :
(i) $\forall a \in I$, $x \mapsto f(a,x) \in L^1$
(ii) $\frac{\partial f}{\partial a}(a_0,x)$ existe $\mu(dx)$ p.p.
(iii) $\exists g \in L^1$ tq $\forall a \in I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial a}(a_0,x)\right| \leq g(x)$ $\mu(dx)$ p.p.

Alors $F : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{C} \\ a \longmapsto \int_X f(a,x)\mu(x) \end{array}$ est bien défini, dérivable en a_0 de dérivée $\int_X \frac{\partial f}{\partial a}(a_0,x)\,\mu(dx)$

Ex : $\mathcal{L}(f)$ est dérivable en tout point, de dérivée
$$\mathcal{L}(f)'(x) = \int_{\mathbb{R}_+} -te^{-tx} f(t)\,dt = \mathcal{L}(t \mapsto -tf(t))$$

Rq : Se généralise de manière immédiate aux dérivées d'ordre supérieures et aux dimensions supérieures.

C Holomorphie (Sur un ouvert D de $\mathbb{C}$)

Théorème 3. Si l'on a :
(i) $\forall z \in D$, $x \mapsto f(z,x)$ est mesurable
(ii) $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe $\mu(dx)$ p.p.
(iii) $\exists g \in L^1$ tq $|f(z,x)| \leq g(x)$ $\forall z \in D$, $\mu(dx)$ p.p.

Alors $F : \begin{array}{l} D \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \int_X f(z,x)\,dx \end{array}$ est bien définie, holomorphe et de dérivée $F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z,x)\mu(dx)$

Ex : $\Gamma : \begin{array}{l} \mathbb{C}_+ \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt \end{array}$ est bien définie et holomorphe

D Remarques :
• Ces résultats sont à valeur locale ; l'hypothèse de domination (iii) peut donc être restreinte à un voisinage quelconque des points considérés (ce qui revient en fait à changer l'espace E pour prendre une de ses parties).

• Si on prends $E = \mathbb{N}$, muni de la mesure de comptage, on retrouve les théorèmes analogues portant sur les suites de fonctions

[ELA]

II Analyse fonctionnelle

A Convolution

Définition 4 : On dit que deux fonctions mesurables $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sont convolables si, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable.
On définit alors
$$f*g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\,dt \end{array}$$

Ex : Si $f \in L^1$, $g = \chi_{[-1,1]}$, f et g sont convolables, et $f*g$ représente la moyenne de f sur un intervalle de longueur 2 autour de chacun de ses points.

Proposition 5 [Propriétés de l'opérateur $*$] Soit f convolable avec g et h.
(i) [Commutativité] g convolable avec f et $f*g = g*f$ (p.p.)
(ii) [Bilinéarité] $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, f convolable avec $\alpha g + \beta h$ et
$$f*(\alpha g + \beta h) = \alpha(f*g) + \beta(f*h)$$

Ex : $*$ n'est pas associatif ! Si $f = \chi_{[0,+\infty[}$, $g = \chi_{[-1,0]} - \chi_{[0,1]}$, $h = \chi_{\mathbb{R}}$.
$$(f*g)*h \neq f*(g*h)$$

Théorème 6 [Convolution dans L^1] Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$
(i) $t \mapsto f(x-t)g(t) \in L^1(\mathbb{R})$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$
(ii) $f*g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$
(iii) $L_1(\mathbb{R})$ muni de la convolution est une algèbre de Banach commutative
(On a cette fois bien l'associativité grâce à Fubini-Tonelli)

Proposition 7 : Cette algèbre n'a pas d'élément unité ; plus généralement, il n'y a pas d'élément neutre pour la convolution.

Définition 8 : On appelle approximation de l'unité toute suite $(\varphi_j)_j \in L_1(\mathbb{R})^{\mathbb{N}^*}$ telles que
(i) $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_j \geq 0$ et $\|\varphi_j\|_1 = 1$
(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{j \to +\infty} \int_{|x| > \varepsilon} \varphi_j(t)\,dt = 0$

Ex : Approximation de Laplace : $\varphi_j(x) = \frac{j}{2} e^{-j|x|}$

Théorème 7 [Approximation] Soit $(\varphi_j)_j$ une approximation de l'unité.
(i) Si f est uniformément continue et bornée, alors $(f*\varphi_j)$ converge unif. vers f
(ii) Si $f \in L^1$, $(f*\varphi_j)$ converge vers f dans L^1

Proposition 8. Soient $f \in L^1$ et g mesurable. Si (g est bornée), ou (g est intégrable sur tout compact et f est à support compact). Alors f et g sont convolables

Théorème 9 [Approximation]
(i) Soient $f \in L^1$, $g \in \mathcal{C}^p$, bornée ainsi que toutes ses dérivées.
Alors $f*g \in \mathcal{C}^p$ et $\forall k \in [\![0,p]\!]$, $D^k(f*g) = f*(D^k g)$
(ii) Soient $f \in L^1$ (à supp cpct), P une fonction polynomiale de degré m, alors $f*P$ est une fonction polynomiale de degré m.

Application 10 [Théorème de Weierstrass] On se place sur le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbb{U}$
- $D_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikt}$: "noyau" de Dirichlet
- $\sigma_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} D_k(t)$ est une approximation de l'unité de $L^1(\mathbb{T})$, et un polynôme trigonométrique

$\to$ Théorème de Weierstrass : $\forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, $(f*\sigma_N) \xrightarrow[\|.\|_\infty]{} f$

B Transformation de Fourier

Définition 11 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurable. Si, $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)e^{-ixt} \in L^1$, on définit $\hat{f} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ixt}\,dt \end{array}$ sa transformée de Fourier.

Théorème 12 : $\mathcal{F} : \begin{array}{l} (L_1(\mathbb{R}), \|.\|_1) \longrightarrow (\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \|.\|_\infty) \\ f \longmapsto \hat{f} \end{array}$ est bien définie, linéaire continue de norme 1, et injective (où $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), \lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0\}$)

Théorème 13 [Formule d'inversion] Si $f \in L^1$ et $\hat{f} \in L^1$, alors
$$\hat{\hat{f}} = x \mapsto 2\pi f(-x)$$

Propriété 14 [Fourier et Convolution] Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. On a :
$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}.$$ Si de plus $\hat{f} \in L^1$, alors $\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}$.

Ex : Résolution dans L^1 de l'équation $f * f = f$

Théorème 15 [Fourier et dérivation] Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

- Si $f \in C^1$ et $Df \in L^1$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\widehat{Df}(x) = ix\hat{f}(x)$
- Si $t \mapsto t f(t) \in L^1$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $D\mathcal{F}(f)(x) = -i\mathcal{F}(t f)(x)$

[O-A 110]

C L'espace $L^2(I, \rho)$ [O-A, 110]

Théorème 16. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)\,dx < +\infty$

Alors $\langle \cdot | \cdot \rangle : \begin{array}{l} L^2(I,\rho) \longrightarrow \mathbb{C} \\ f, g \longmapsto \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\,dx \end{array}$ est un produit hermitien

et $(L^2(I,\rho), \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est alors un espace de Hilbert.

Propriété 17 Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires, orthogonaux deux-à-deux, telle que $\deg P_n = n$.

Théorème 18 : S'il existe $\alpha > 0$ tq $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,dx < +\infty$ $\boxed{\text{DEV}}$

alors la famille de polynômes orthogonaux associés à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$ pour la norme $\|\cdot\|_\rho$.

III Analyse réelle

A Comportement asymptotique

Lemme 19 [Césaro] Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ localement intégrable tq $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha \in \mathbb{C}$

Alors $\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \alpha$

[GOU 342]

Application 20 [Intégrale de Fresnel] $\int_0^{+\infty} e^{ix^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\boxed{\text{DEV}}$

Théorème 21 : Soient $-\infty < a < b \leq +\infty$, $f : [a,b[\to \mathbb{R}$, $g : [a,b[\to \mathbb{R}_+^*$ continues par morceaux sur $[a,b[$ [GOU]

(i) Si $\int_a^b g$ diverge, alors, pour $x \to b^-$,

Si $f \begin{cases} = O(g) \\ = o(g) \\ \sim g \end{cases}$ alors $\int_a^x f(t)\,dt \begin{cases} = O \\ = o \\ \sim \end{cases} \int_a^x g(t)\,dt$

(ii) Si $\int_a^b g$ converge, alors, pour $x \to b^-$,

Si $f \begin{cases} = O(g) \\ = o(g) \\ \sim g \end{cases}$ alors $\int_x^b f(t)\,dt \begin{cases} = O \\ = o \\ \sim \end{cases} \int_x^b g(t)\,dt$

Théorème 22 [Méthode de Laplace] Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, $\varphi \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R})$. On distingue deux cas : [CAN 56]

(i) $\forall t \in]a,b[$, $\varphi'(t) < 0$ (φ atteint son max en a), et $f(a) \neq 0$

alors $\int_a^b f(t) e^{x\varphi(t)}\,dt \underset{x\to+\infty}{=} e^{x\varphi(a)}\left[\frac{f(a)}{-\varphi'(a)}\frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$

(ii) φ' s'annule en un unique $t_0 \in]a,b[$; De plus, $\varphi''(t_0) < 0$ et $f(t_0) \neq 0$,

alors $\int_a^b f(t) e^{x\varphi(t)}\,dt = e^{x\varphi(t_0)}\left[f(t_0)\sqrt{\frac{2\pi}{-\varphi''(t_0)}}\frac{1}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

Application 23 [Formule de Stirling]
$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\, x^x e^{-x} + O(x^x e^{-x})$$

B Newton - Reste intégral

Théorème 24. Soient $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$

Alors $F(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^n}{n!} F^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} F^{(n+1)}(t)\,dt$

Application 25 : Soit $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ tq $f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) = a\}$ [FGN 25]
$$\min_{f\in\mathcal{F}} \int_0^1 (f''(t))^2\,dt = 3a^2$$

Application 26 : Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(]a,b[, \mathbb{R})$ tq $\forall x \in]a,b[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) \geq 0$ [FGN 238]

Alors f est analytique

Références :

[B-P] : Briane, Pagès
Théorie de l'intégration

[MAR00] : Analyse L3

[O-A] : Objectif Agreg

[GOU] : Gourdon,
Analyse

[CAN] : Candelpergher,
Calcul intégral

[FGN] : Oraux X-ENS
Analyse 2.

[ELA] El-Amrani
Analyse de Fourier
dans les espaces fonctionnels

Intégrale de Fresnel

Référence : Les maths en tête, analyse. Xavier Gourdon

2011-2012

On pose dans la suite :

$$F(t) = \iint_{[0,t]^2} e^{i(x^2+y^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$f(t) = \int_0^t e^{ix^2} \mathrm{d}x$$
$$I(T) = \frac{1}{T} F(t) \mathrm{d}t$$

On cherche à montrer :

Théorème 1
L'intégrale de Fresnel vaut :

$$\int_0^\infty e^{ix^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4}.$$

Démonstration. Il est assez clair que $F(t) = f(t)^2$. Calculons-la d'une autre manière.

$[0,t]^2$ est symétrique par rapport à la première bissectrice, et donc, en posant $\Delta_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant t\}$:

$$F(t) = 2 \iint_{\Delta_t} e^{i(x^2+y^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

La vision de $x^2 + y^2$ donne très envie de passer en polaire. Δ_t devient alors

$$K_t = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, \frac{\pi}{4}] \mid 0 \leqslant r\cos\theta \leqslant t\}.$$

On a donc, par changement de variables :

$$F(t) = \iint_{K_t} e^{ir^2} r \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

Par théorème de Fubini (on est sur un compact) :

$$\begin{aligned} F(t) &= 2 \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{t/\cos\theta} e^{ir^2} r \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{i} \left(\exp\left(i \frac{t^2}{\cos^2\theta} \right) - 1 \right) \\ &= \frac{i\pi}{4} - i \int_0^{\pi/4} \exp\left(i \frac{t^2}{\cos^2\theta} \right) \mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

On a donc, en utilisant à nouveau le théorème de Fubini :

$$I(t) = \frac{i\pi}{4} - \frac{i}{T}\int_0^{\pi/4} \cos(\theta) f\left(\frac{T}{\cos\theta}\right).$$

Lemme 2
$\varphi = \int_0^\infty e^{ix^2}\mathrm{d}x$ est semi-convergente.

Démonstration. On pose $u = x^2$. Alors :

$$\varphi = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{iu}u^{-1/2}\mathrm{d}u$$

qui est semi-convergente (faire une intégration par parties). ◊

f est donc bornée sur $\mathbb{R}^+$, et donc I converge vers $\frac{i\pi}{4}$ en $+\infty$.
Par ailleurs, on a

$$I(T) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\mathrm{d}t,$$

, et $f(t)^2$ converge vers φ^2 en $+\infty$, donc, par théorème de Césaro, I converge vers φ^2 en $+\infty$.
Finalement, $\varphi = \pm\frac{\sqrt{\pi}}{4}e^{i\pi/4}$. Il ne nous reste qu'à trouver le signe. Pour cela, regardons

$$s = \mathrm{Im}(\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \sin(x)x^{-1/2}\mathrm{d}x.$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} s &= \sum \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u \\ &= \sum \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \frac{\sin u}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u+\pi}}\right)\mathrm{d}y \end{aligned}$$

et chaque terme de la somme est positif.
D'où le résultat.

□

Densité des polynômes orthogonaux

Antoine Louazel et Mathias Millet

Théorème : Soit $\rho : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction poids. Si on suppose qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty,$$

alors l'ensemble des polynômes orthogonaux associés à ρ forment une famille orthogonale et totale de $L^2(I,\rho\mathrm{d}\lambda)$, espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle\,,\rangle$ défini pour $f,g \in L^2(I,\rho\mathrm{d}\lambda)$ par

$$\langle f,g\rangle := \int_I f(x)\overline{g(x)}\,\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

Preuve : On commence par noter que tout polynôme appartient à $L^2(I,\rho\mathrm{d}\lambda)$, donc en particulier les polynômes orthogonaux : Par définition de la fonction poids, $x \longmapsto x^n \in L^1(I,\rho\mathrm{d}\lambda)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc les carrés de ces fonctions aussi. Le résultat s'en suit par linéarité.

Par définition, les polynômes orthogonaux P_n associés à ρ forment une base orthogonale pour le produit scalaire $\langle\,,\rangle$. Pour prouver qu'ils forment une famille totale, nous allons montrer le fait que :

$$\{x \longmapsto P_n(x) : n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\},$$

ce qui démontrera le résultat (c'est l'une des caractérisations d'une famille totale lorsque la famille est orthogonale). Etant donné que les X^k s'expriment sur les P_n et réciproquement, il est alors équivalent de montrer que $\{x \longmapsto x^n : n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$.

Soit alors $f \in L^2(I,\rho\mathrm{d}\lambda)$ telle que $\int_I x^n f(x)\rho(x)\mathrm{d}x = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On veut prouver que $f = 0$ presque partout.

On définit pour cela la fonction φ sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x)\rho(x)\mathbf{1}_I(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En effectuant la majoration évidente suivante :

$$|f(x)|\rho(x) \leq \frac{1}{2}(1 + |f(x)|^2)\rho(x)$$

pour tout $x \in I$ et en remarquant que ρ et $f^2\rho$ sont intégrables sur I, on obtient donc le fait que $\varphi \in L^1(\mathbb{R},\mathrm{d}\lambda)$. On peut donc considérer la transformée de Fourier de φ :

$$\hat{\varphi}(\omega) = \int_I f(x)e^{-i\omega x}\rho(x)\mathrm{d}x$$

pour $\omega \in \mathbb{R}$.

Posons maintenant $B_\alpha := \{z \in \mathbb{C} : |\Im(z)| < \alpha/2\}$ et on va montrer que $\hat{\varphi}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur B_α. Soient $g(z,x) := f(x)e^{-izx}\rho(x)$ pour $x \in I$ et $z \in B_\alpha$, et

$$F(z) := \int_I g(z,x)\mathrm{d}x.$$

Montrons que F est bien définie et holomorphe sur B_α. Pour cela, on vérifie les hypothèses du théorème d'holomorphie sous le signe intégral :

- Pour tout $x \in I$, $z \longmapsto g(z,x)$ est clairement holomorphe.
- Pour tout $z \in B_\alpha$, $x \longmapsto g(z,x)$ est mesurable comme produit de fonctions mesurables
- Pour tout $z \in B_\alpha$, $|g(z,x)| \leq e^{\frac{\alpha}{2}|x|}|f(x)|\rho(x)$ et $x \longmapsto e^{\frac{\alpha}{2}|x|}|f(x)|\rho(x)$ est une fonction intégrable sur I qui est indépendante de z. En effet, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_I e^{\frac{\alpha}{2}|x|}|f(x)|\rho(x)\,dx \leq \left(\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_I |f(x)|^2\rho(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} < +\infty$$

La fonction F est donc holomorphe sur B_α et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in B_\alpha$,

$$F^{(n)}(z) = \int_I \frac{\partial^n g(z,x)}{\partial z^n}\,\mathrm{d}x = (-i)^n \int_I x^n e^{-izx} f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

En évaluant en 0, on obtient :

$$F^{(n)}(0) = (-i)^n \int_I x^n f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

par hypothèse sur f.

Par unicité du développement en série entière, on en déduit que F est nulle sur un voisinage de 0 et par le théorème de prolongement analytique, il s'ensuit que F est nulle sur tout le connexe B_α. En particulier, F est nulle sur l'axe réel et cela signifie exactement que $\hat{\varphi} = 0$. L'injectivité de la transformée de Fourier nous permet alors de voir que $\varphi = 0$ dans $L^1(\mathbb{R}, \mathrm{d}\lambda)$ et vu que $\rho(x) > 0$ pour tout x dans l'intérieur de I, on déduit alors que $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in I$. ■

Référence : V. Beck, J. Malick, G. Peyré – Objectif Agrégation (2e édition) (pages 140-142)