239 (I) Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications

Pour (X,μ) un espace mesuré et E un espace métrique, avec $f : E\times X \to \mathbb{C}$, on s'intéresse à $F : t \mapsto \int_X f(t,x)\,d\mu(x)$

I] Régularité des intégrales à paramètre. [ZQ p306 ch IX]

1] Continuité.

Thm 1 : Si :

i) pour $t\in E$, $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable
ii) pour presque tout $x\in X$, $t\mapsto f(t,x)$ est continue sur E
iii) pour tout compact K de E, il existe $g\in L^1(X)$ positive telle que pour $t\in K$, $|f(t,x)|\leqslant g(x)$ pour presque tout $x\in X$

alors la fonction F est définie et continue sur E

ex 2 : si g est L^1 et continue sur $\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$,
$G : x\mapsto \int_a^x g(x)\,dx$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

c-ex 3 : $f : t,x \mapsto t e^{-xt}$ est continue sur $[0,+\infty[^2$, [Hau 11.22 p224]
mais $F(t) = \int_0^{+\infty} f(t,x)\,dx = \begin{pmatrix} 1 \text{ si } t\neq 0 \\ 0 \text{ si } t=0\end{pmatrix}$ n'est pas continue

2] Dérivabilité

Thm 4 : Si E est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et :

i) pour $t\in E$, $x\mapsto f(t,x) \in L^1(X)$
ii) pour presque tout $x\in X$, $t\mapsto f(t,x)$ est dérivable sur E
iii) pour tout compact K de E, il existe $g\in L^1(X)$ positive telle que pour presque tout x, et pour $t\in K$, $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leqslant g(x)$

alors : 1) pour tout $t\in E$, $x\mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) \in L^1(X)$
2) F est dérivable sur E et $F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,d\mu(x)$

Rq 5 : Si dans ii) on remplace dérivable par $\mathcal{C}^1$
(resp par D^k ou $\mathcal{C}^k$, $k\in[\![2,+\infty]\!]$, avec $\frac{\partial^k f}{\partial t^k}$ dans le iii))
alors dans 2) F est $\mathcal{C}^1$
(resp D^k ou $\mathcal{C}^k$ avec $\frac{\partial^k f}{\partial t^k}$ dans l'intégrale)

ex 6 : $F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,\frac{\sin x}{x}\,dx$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$
$\mathcal{C}^0$ sur $[0;+\infty[$ [ZQ p316]

application : $F'(t) = -\frac{1}{1+t^2} \Rightarrow F(t) = -\operatorname{Arctan} t + \frac{\pi}{2}$
par continuité, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = F(0) = \frac{\pi}{2}$

c-ex 7 : $f : t,x \mapsto t^2 e^{-x|t|}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$ [Hau 11-24 p225]
mais la dérivée de $F(t) = \int_0^{+\infty} f(t,x)\,dx$ n'est pas continue en 0

ex 8 : Si $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, et $f(0)=0$, alors
$g : x \mapsto \begin{cases} f'(0) & \text{si } x=0 \\ \frac{f(x)}{x} & \text{si } x\neq 0\end{cases}$ est $\mathcal{C}^\infty$ [Gou p164 III 4 Ex3]

3] Holomorphie

Thm 9 : Si E est un ouvert de $\mathbb{C}$, et :

i) pour $t\in E$, $x\mapsto f(t,x)\in L^1(X)$
ii) pour presque tout $x\in X$, $t\mapsto f(t,x)$ est holomorphe sur E
iii) pour tout compact $K\subset E$, il existe $g\in L^1(X)$ positive telle que pour $z\in K$ et pour presque tout $x\in X$, $|f(z,x)|\leqslant g(x)$

Alors F est holomorphe et $F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z,x)\,d\mu(x)$

ex 10 : pour $\mathrm{Re}(z)>0$, on pose

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x}\,dx.$$

DEV ?

[ZQ p312]

La fonction est ainsi bien définie et holomorphe.

À l'aide de la formule $\Gamma(z) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^z\, n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}$,

on peut prolonger Γ en une fonction méromorphe.

Rq 11 : Le théorème 9, contrairement au thm 4, ne fait pas d'hypothèse sur $\frac{\partial f}{\partial z}$. On utilise pour cela la formule de Cauchy ci-après.

II Intégrales à paramètre en analyse complexe

Dans cette section, Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, et D est un disque (fermé) inclus dans Ω de centre z_0 de rayon R

1| La formule de Cauchy: [AM 3.3 p 81]

Thm 12 [de Cauchy]

Sous ces hypothèses $\int_{\partial D} f(z)dz = 0$

Thm 13 [Formule de Cauchy].

Soit $z \in \mathring{D}$; Alors $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$

Coro 14:

Pour $z \in \mathring{D}$, $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$

Application 15: Toute fonction holomorphe sur Ω est développable en série entière au voisinage de chaque point de Ω

Coro 16: [Formule de la moyenne]

$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta})\, d\theta$

2| Le théorème des résidus [AM Ch.8 p239]

def 17 Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $a \notin \Omega$ et il existe une couronne C centrée en a avec $C \subset \Omega$. Soit $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ le développement en série de Laurent de f en a.
a_{-1} est appelé résidu de f en a et est noté $\text{Res}(f,a)$

Thm 18: On suppose qu'il existe $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ tels que $\Omega \cup \{z_1, \dots, z_n\}$ soit un ouvert simplement connexe. Soit $\gamma \subset \Omega$ un lacet. $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(f,a) . \text{Ind}_\gamma(a)$

ex 19: Si $f(z) = \frac{g(z)}{z-a}$, $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, alors $\text{Res}(f,a) = g(a)$

Si $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n}$, $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, alors $\text{Res}(f,a) = \frac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$

3| Exemples:

ex 20: $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$, $a > 1$ [AM 8.4.1 p 246]

ex 21: Si $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, la transformée de Fourier de f vaut $\hat{f} = \sqrt{2\pi}\, f$

ex 22: [Formule des compléments] DEVELOPPEMENT 1

$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$ $(0 < \text{Re}(z) < 1)$ [AM 8.4.4 p249]

ex 23:

$\int_0^\infty \cos(t^2)dt = \int_0^\infty \sin(t^2)\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ [AM ex 3.32 p 107]

ex.24: Calcul de $\int_{\partial\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz$ avec $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} / \text{Im}(z) \geq 0, \varepsilon \leq |z| \leq R\}$ avec $0 < \varepsilon < R$

d'où $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

4| Application: principe de l'argument

Thm 25: Avec les mêmes hypothèses que le Thm 18, si γ est simple et positivement orienté formant le bord de K

$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P$

Avec Z la somme des multiplicités des zéros de f dans K
P la somme des multiplicités des pôles de f dans K

III) Produit de convolution et transformée de Fourier : [ZQ] chap IX partie III

1) **Déf 26** : (Produit de convolution) Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors la fonction $f*g$ définie par $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)\, g(x-t)\, dt$ (qui est définie presque partout) est dite <u>produit de convolution</u> de f et g.

Prop 27 : $L^1(\mathbb{R})$ muni de $*$ est une algèbre de Banach associative et commutative sans élément neutre.

Prop 28 : (Régularité de la convolution) Si $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$, f ou g étant à support compact, alors $f*g \in C^\infty(\mathbb{R})$, et $(f*g)^{(n)} = f^{(n)} * g$ pour tout $n \geq 0$.

Déf 29 : On appelle <u>approximation de l'unité</u> une famille $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ de fonctions positives telles que $\|\rho_\varepsilon\| = 1$ et $\mathrm{supp}(\rho_\varepsilon) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Exple 30 : Posons $\rho_0 = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, et $\rho = \frac{\rho_0}{\|\rho_0\|_1}$. Alors pour $\varepsilon > 0$, $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ est une approx de l'unité.

Prop 31 : ① Si $f \in C_c^0(\mathbb{R})$, alors $\rho_\varepsilon * f \xrightarrow{CU} f$ sur $\mathbb{R}$.
② Si $f \in L^p_c(\mathbb{R})$, alors $\rho_\varepsilon * f \longrightarrow f$ dans $L^p(\mathbb{R})$ (pour $p \in [1, +\infty[$)

Application 32 : Théorèmes de densité :

Thm : ① $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $C^0(\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$.
② $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.

Application 33 : Noyau de Dirichlet et séries de Fourier : [ZQ] IV.II.2 et IV.III.3
Si $D_N(x) = \sum_{-N}^{N} e^{inx}$, alors pour $f \in L^1$, $S_N = f * D_N$ est le dév en série de Fourier de f à l'ordre N. Alors, on a :

Thm (Dirichlet) 34 : Si f est C^0 et C^1 par morceaux, $S_N(f) \xrightarrow[N\to+\infty]{\text{simple}} f$

2) Transformée de Fourier [ZQ] IX.IV, [R] chap 9

Déf 35 : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier de f est la fonction $\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x)\, dx \quad (t \in \mathbb{R})$.

Prop 36 : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R})$ et $\hat{f}$ tend vers 0 à l'infini.

Prop 37 : Si $f \in L^1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors :
① Si $g(x) = f(x) e^{i\alpha x}$, alors $\hat{g}(t) = \hat{f}(t-\alpha)$
② Si $g \in L^1$ et $h = f*g$, alors $\hat{h}(t) = \hat{f}(t)\hat{g}(t)$
③ Si $g = \overline{f(-x)}$, $h(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, et $f' \in L^1$, alors $\hat{g} = \overline{\hat{f}}$, $\hat{h}(t) = \lambda \hat{f}(\lambda t)$ et $\widehat{f'}(t) = it\hat{f}(t)$

Thm 38 (formule d'inversion) : Si $f, \hat{f} \in L^1$, alors $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{itx}\, dt$

Cor 39 : Si $f \in L^1$ et $\hat{f} = 0$, alors $f = 0$ presque partout.

Exples 40 :
* Si $f(x) = e^{-x^2}$ alors $\hat{f}(t) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{t^2}{4}}$
* Si X est une v.a. réelle à densité, alors la fonction caractéristique $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$ est la transformée de Fourier inverse de la densité, et elle caractérise la loi de X.

→ [OA] Ex 3.7 p 140

Thm 41 : (Densité des polynômes orthogonaux) : Si ρ est une fonction strictement positive telle que $\int_{\mathbb{R}} x^n \rho(x)\, dx < +\infty$ pour tout n, alors l'espace $L^2(\rho)$ des fonctions mesurables f telles que $f^2\rho$ est intégrable est un espace de Hilbert pour $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) \rho(x)\, dx$ et admet une base hilbertienne de polynomes $(P_n)_n$ orthogonaux tels que $\deg P_n = n$. DEVELOPPEMENT 2

Appl 42 (Équation de la chaleur) $(E)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x \in \mathbb{R}, t > 0) \\ u(x,0) = f(x) & (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$ admet une solution C_b^∞ sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ si f est continue et bornée.

[ZQ] Zuily - Queffélec 4°ed
[Hau] Hauchecorne "Les contre-exemples..."
[Gou] Gourdon 2°ed
[AM] Amar - Matheron "Analyse complexe"
[R] Rudin "Analyse réelle et complexe" 3°ed.
[OA] Objectif Agregation