239. Fonctions définie par une Intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et Applications

Cadre : $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espace mesuré ; E espace métrique.

on considère la fonction $f : (E \times X \to \mathbb{C})$. on pose $F(x) = \int_X f(x,t)\,d\mu(t)$

I - Etude de la régularité des Intégrales dépendant d'un paramètre.

1°) Continuité :

Théo ① : supposons les conditions suivantes vérifiées :

i) $\forall x \in E$, $t \mapsto f(x,t)$ est mesurable

ii) $\forall t \in X$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue en $x_0 \in E$.

iii) $\exists g \in L^1(\mu)$ positive, indépendante de "x" telle que :

$$\forall x \in E, \quad |f(x,t)| \leq g(t) \quad \text{pp en } t \quad (\text{Hypothèse domination})$$

Alors : $F(x) = \int_X f(x,t)\,d\mu(t)$ est continue en $x_0 \in E$.

Cor ② : supposons que :

i) $\forall x \in E$, $t \mapsto f(x,t)$ est mesurable

ii) $\forall t \in X$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur E.

iii) $\forall K \subset\subset E$, $\exists g_K \in L^1(\mu)$ positive, indépendante de x telle que :

$$\forall x \in K, \quad |f(x,t)| \leq g_K(t) \quad \text{pp en } t.$$

Alors $F(x) = \int_X f(x,t)\,d\mu(t)$ est continue sur E.

Ex ③ • $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin t}{t}\,dt \in C^0(\mathbb{R}_+)$

• $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\,dt = \frac{2}{x}\int_{\mathbb{R}} \frac{t\sin(tx)}{(t^2+1)^2}\,dt$, $F \in C^0(\mathbb{R})$

cex ④ • $f(x,t) = t e^{-tx} \in C^0(\mathbb{R}_+^2)$, $F(x)$ existe sur $\mathbb{R}_+$, mais n'est pas continue en 0.

• $f(x,t) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ $\forall (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}$; $F(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

2°) Dérivabilité

Théo ⑤ supposons que E est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et que :

i) $\forall x \in E$, $t \mapsto f(x,t) \in L^1(X)$

ii) $\forall t \in X$, $x \mapsto f(x,t) \in C^1(E)$

iii) $\forall K \subset\subset E$, $\exists g_K \in L^1(\mu)$, positive, indépendante de "x" telle que

$$\forall x \in K, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq g_K(t) \quad \text{pp en } t.$$

Alors $F \in C^1(E)$ et $F'(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mu(dt)$

Théo ⑥ Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que E soit un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et que :

i) $\forall x \in E$, $t \mapsto f(x,t) \in L^1(X)$

ii) $\forall t \in E$, $x \mapsto f(x,t) \in C^k(E)$

iii) $\forall j \in \{1, \dots, k\}$, $\forall K \subset\subset E$, $\exists g_{jK} \in L^1$, positive, indépendante de "x" /

$$\forall x \in K, \quad \left|\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\right| \leq g_{jK}(t) \quad \text{pp en } t.$$

Alors $F \in C^k(E)$ et $\forall j \in \{1, \dots, k\}$, $F^{(j)}(x) = \int_X \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\,dt$.

Rmq ⑦ : on peut remplacer l'intervalle E de $\mathbb{R}$ par Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Ex ⑧ • $\forall x \geq 0$, $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin t}{t}\,dt = -\operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2} \in C^1(\mathbb{R}_+^*)$

• $\forall x \geq 0$, $F(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} e^{2i\pi xt}\,dt = \sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2 x^2}$ dérivable.

cex ⑨ : • $f(x,t) = x^2 e^{-t|x|} \in C^1(\mathbb{R})$ mais F n'est pas dérivable

App ⑩ : • $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\log t)^n e^{-t}\, t^{x-1}\,dt \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

App ⑪ : Formule sommatoire de Poisson.

3°) Holomorphie :

Théo ⑫ : Soit E un ouvert de $\mathbb{C}$. supposons que :

i) $\forall z \in E$, $t \mapsto f(z,t) \in L^1(X)$

ii) $\forall t \in X$, $z \mapsto f(z,t) \in H(E)$

iii) $\forall K \subset\subset E$, $\exists g_K \in L^1$, positive, indépendant de z telle que

$$\forall z \in K, \quad |f(z,t)| \leq g_K(t) \quad \text{pp en } t.$$

Alors $F \in H(E)$ et $F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\,d\mu(t)$.

Ex ⑬ $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\,dt \in H(\operatorname{Re} z > 0)$ Fct Gamma (dans $\mathbb{C}$ plex)

App ⑭ Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$.

App ⑮ Formule des compléments : $\forall z \in \{s \in \mathbb{C} / 0 < \operatorname{Re}(s) < 1\}$, $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$

II - 1er application : Convolution.

$\boxed{\text{DVLP n° 1}}$

1°) Convolution et Régularisation :

Déf (16) soient $f, g : (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions boréliennes et positives.
La convolée de f et g, notée $f*g$ est définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\lambda d(dy)$$

Déf (17) soient $f, g : (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \mapsto \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) deux fonctions boréliennes :
$y \mapsto f(x-y)g(y) \in \mathcal{L}^1 \iff |f| * |g| < +\infty$.
on définit, $f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\lambda d(dy)$

Prop (18) Si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^d)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ avec $r, p, q \in [1, +\infty]$
alors $f*g \in \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^d)$, $\|f*g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$

Cor (19) : Si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^d)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ avec $p, q \in]1, +\infty[$
et $r = +\infty$ alors $f*g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\lim_{\pm\infty} f*g(x) = 0$,
$f*g$ est uniformément continue, et bornée.

Théo (20)
- Si $f \in C_c^k(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ alors $f*g \in C^k(\mathbb{R}^d)$
De plus, $\forall |\alpha| \leq k$, $D^\alpha(f*g) = (D^\alpha f) * g$.
- Si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $g \in C^0(\mathbb{R}^d)$ (ou $\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$) alors $f*g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$
De plus, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha(f*g) = (D^\alpha f) * g$.

Ex (21) Si $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, et $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) \mathbb{1}_{\{|x|<1\}} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$
alors $f*g \in C^\infty(\mathbb{R})$

2°) Identités Approchées

Théo (22) $(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d), +, \times, *)$ est une algèbre commutative ne possédant pas d'élément unité.

Déf (23) on dit que $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonction intégrable est une approximation de l'unité ou une identité approchée si
i) $\alpha_n \geq 0$ pp $\forall n \in \mathbb{N}$.
ii) $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n(t)\,dt = 1$
iii) $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \int_{\{|t| > \varepsilon\}} \alpha_n(t)\,dt = 0$

Construction : des Identités Approchées
Il suffit de prendre une fonction φ intégrable, positive telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi = 1$. Ainsi, la suite de fonctions :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall t \in \mathbb{R}^d, \quad \varphi_n(t) = n^d \varphi(nt)$$
forme une identité approchée.

Déf (24) on appelle suite régularisante, toute suite $(\alpha_n) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ /
$\text{supp}\,\alpha_n \subset B(0, \frac{1}{n})$, $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n(x)\,dx = 1$, $\alpha_n \geq 0$.

Rmq (25) Il existe toujours des suites régularisantes.
Il suffit de prendre une fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, positive, telle que $\text{supp}\,\varphi \subset B(0,1)$.
on considère ensuite $\varphi_n(x) = \dfrac{n^d \varphi(nx)}{\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,dx}$

Ex (26) $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} \mathbb{1}_{\overline{B(0,1)}}(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\text{supp}\,\varphi \subset \overline{B(0,1)}$.

Théo (27) soit (α_n) une approximation de l'unité.
1- Si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$ alors
$f*\alpha_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^d$ (CVU)
Si f est continue sur $\mathbb{R}^d$ alors $f*\alpha_n \xrightarrow{CVU} f$ $\forall K \subset\subset \mathbb{R}^d$
2- Si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$ alors $f*\alpha_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} f$ sur $\mathbb{R}^d$

App (28) $\overline{C_c^\infty(\Omega)} = \mathcal{L}^p(\Omega)$ $1 \leq p < +\infty$ avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Théo (29) de Fejer :
soit f une fonction 2π-périodique, continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$
on appelle noyau de Fejer d'ordre $N \geq 1$, la fonction $K_N = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(\frac{Nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2$
c'est une approximation de l'unité.
on pose $\sigma_N(f) = f * K_N$
Alors $\sigma_N(f) \xrightarrow[N\to+\infty]{CVU} f$

III . Application 2 : Transformation de Fourier et de Laplace :

1°) Transformation de Fourier :

Déf (30) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors on appelle transformée de Fourier de f, la fonction définie par : $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, dx \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

Déf/Prop (31) on appelle transformation de Fourier, l'application : $\mathcal{F} : \begin{pmatrix} L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0^0(\mathbb{R}^n) \\ f \mapsto \hat{f} \end{pmatrix}$

où $C_0^0(\mathbb{R}^n) = \{ g \in C^0(\mathbb{R}^n) \;/\; \lim_{|x|\to+\infty} g(x) = 0 \}$

C'est une application linéaire, continue, injective, non surjective.

Prop (32) Si $x \mapsto x_j f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_k}(\xi) = -i\,\widehat{x_k f}(\xi)$

Si $x \mapsto |x|^k f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors $\hat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $D^\alpha \hat{f}(\xi) = \widehat{(-ix)^\alpha f}(\xi)$ $\forall |\alpha| \le k$

Si $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = i\xi_j \hat{f}(\xi)$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$

App (33) La transformée de Fourier d'une gaussienne : . . .

Prop (34) Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors $\widehat{f*g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\cdot\hat{g}(\xi)$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

Théo (35) Inversion de Fourier :

Si $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors $f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\, e^{i\langle x,\xi\rangle}\, d\xi$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

App (36) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids.
on suppose qu'il existe $\alpha > 0$ / $\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x)\, dx < +\infty$.
Alors la famille des polynômes orthogonaux associés à ρ
DVLP n°2 forme une base Hilbertienne de $L^2(I,\rho)$ pour $\|\cdot\|_\rho$.

Déf (37) Soit X une va de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, de densité f.
on appelle fonction caractéristique de la loi de X, l'application
$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t,x\rangle} f(x)\, dx.$$
elle est également appelée transformée de Fourier de f.

Théo (38) La fonction caractéristique caractérise la loi d'une va.

Rmq (39) En lien direct avec l'injectivité de la transformée de Fourier

Ex (40) Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ alors $\varphi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$.
Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\varphi_X(t) = \exp(\lambda(e^{it}-1))$

Prop (41) Si X va, admet un moment d'ordre n ($E[|X|^n] < +\infty$) alors $\varphi_X \in C^n(\mathbb{R}^d)$ et $\forall k \le n$, $\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \int_\Omega x^k e^{itx} f(x)\, dx$

2°) Transformation de Laplace :

Déf (42) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$.
on appelle transformée de Laplace de f, la fonction :
$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt}\, dt$$
lorsque cette intégrale converge.

Prop (43) Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

i) Si $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt$ converge alors $\forall y \ge x$, $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-yt} dt$ converge.

ii) Si f bornée sur $\mathbb{R}_+$ alors $\mathcal{L}(f) \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f)^{(n)}(x) = 0$
avec $\mathcal{L}(f)^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t) e^{-xt} dt$

iii) Si $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge alors $\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t) dt$ et $\mathcal{L}(f)$ continue en 0.

App (44) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$

Cex (45) $f(t) = e^{t^2}$ n'a pas de transformée de Laplace.

Déf (46) soit X une va de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, de densité f.
on appelle transformée de Laplace de la loi de X, la fonction définie par :
$$\Phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{\langle t,x\rangle}\, dx \quad \forall t \in \mathbb{R}^d.$$

Ex (47) Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ alors $\Phi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$.
Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\Phi_X(t) = \exp(\lambda(e^t - 1))$

Théo (48) La transformée de Laplace caractérise la loi d'une va.

Prop (49) La fonction de Laplace est analytique au voisinage de 0.
Sur le voisinage de 0, Φ_X s'écrit : $\Phi_X(t) = \sum_{\mathbb{N}} \frac{t^n}{n!} E[X^n]$

App (50) L'inégalité de Hoeffding :

Zuily - Queffelec Analyse pour l'agregation
Hauchocorne - Contre exemple en mathématique.
Gourdon - Analyse
objectif - Agregation
Briane - Pages - Théorie de l'intégration
Ouvrard - Probabilité 2
Pommelet - Cours d'Analyse
Madère - Leçon d'Analyse
Barbe Ledoux - Probabilité

Densité des polynômes orthogonaux [1]

Leçons : 209, 213, 239, 245, *201, 202, 207, 240, 244*

[OA], exercice 3.7

Rappels :

1. Pour I un intervalle de $\mathbb{R}$, on appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive, et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n \rho(x)\,\mathrm{d}x < \infty$.
2. On note $\mathrm{L}^2(I,\rho)$ l'espace des fonctions (où on a identifié celles qui sont égales presque partout), de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue ; il est muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\,\mathrm{d}x$. C'est un espace de Hilbert, qui contient les polynômes.
3. Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux, et vérifiant $\deg P_n = n$. On l'appelle "famille des polynômes orthogonaux associée à ρ". On l'obtient en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème

Soient I un intervalle [2] de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids.
On suppose : $\exists a > 0, \int_I \mathrm{e}^{a|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x < \infty$. [3]
Alors les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(I,\rho)$.

Démonstration :

Étape 1 : $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée ; il suffit de montrer qu'elle est totale.

On va montrer que $\mathrm{Vect}\left((P_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est dense dans $\mathrm{L}^2(I,\rho)$, c'est-à-dire que $\mathrm{Vect}\left((P_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)^\perp = \{0\}$.
Par construction, on a : $\mathrm{Vect}\left((P_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \mathrm{Vect}\left((X^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \mapsto x^n$.

1. À quoi servent les polynômes orthogonaux ? Ils apparaissent en intégration numérique (révisez la méthode de Gauss) et pour la diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts dans une base hilbertienne.
2. Si I est compact, l'hypothèse sur ρ est inutile et le théorème est trivialisé par le théorème de Weierstrass.
3. Regardons un contre-exemple (à connaître, mais mieux vaut prendre le temps de bien faire le développement et se garder le contre-exemple sous le coude pour les questions).
Prenons $I = \mathbb{R}^{+*}$ et $w(x) = x^{-\ln x}$ une fonction poids sur $\mathbb{R}^{-*}$; en fait, w ne vérifie pas l'hypothèse d'écrasement, et on va voir que les polynômes orthogonaux pour w ne constitue pas une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(I,w)$.
On pose $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(2\pi\ln x) \end{array} \right.$, et on fixe $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\langle f, g_n\rangle &= \int_{\mathbb{R}^{+*}} x^n \sin(2\pi\ln x) x^{-\ln x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ny}\sin(2\pi y)\,(\mathrm{e}^y)^{-y}\,\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y \quad \text{(on a posé } y = \ln x \text{ et } \mathrm{d}x = \mathrm{e}^y \mathrm{d}y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{(n+1)y-y^2}\sin(2\pi y)\,\mathrm{d}y \quad \text{(on utilise } (n+1)y - y^2 = \frac{(n+1)^2}{4} - \left(y - \frac{n+1}{2}\right)^2 \text{ pour la ligne suivante)} \\
&= \exp\left(\frac{(n+1)^2}{4}\right)\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\left(y-\frac{n+1}{2}\right)^2\right)\sin(2\pi y)\,\mathrm{d}y \\
&= \exp\left(\frac{(n+1)^2}{4}\right)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2}\sin(2\pi t + (n+1)\pi)\,\mathrm{d}t \quad \text{(on a posé } t = y - \frac{n+1}{2} \text{ et } \mathrm{d}t = \mathrm{d}y) \\
&= (-1)^{n+1}\exp\left(\frac{(n+1)^2}{4}\right)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2}\sin(2\pi t)\,\mathrm{d}t \\
&= 0 \quad \text{(intégrale d'une fonction impaire intégrable)}
\end{aligned}$$

Ainsi, f est dans l'orthogonal de l'espace vectoriel engendré par les polynômes orthogonaux pour w, sans pour autant être nulle dans $\mathrm{L}^2(I,w)$.

On va donc montrer que $\forall f \in L^2(I,\rho)$, $[\forall n \in \mathbb{N}, \langle f, g_n\rangle_\rho = 0] \Rightarrow [f = 0]$.
Dans la suite, on fixe $f \in L^2(I,\rho)$ et vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \langle f, g_n\rangle_\rho = 0$.

Étape 2 : On pose $\varphi = f\rho\mathbb{1}_I$; montrons que $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.

Rappelons que : $\forall t \in \mathbb{R}^+, t \leqslant \dfrac{1+t^2}{2}$. Ainsi, $\forall x \in I, |\varphi(x)| \leqslant \dfrac{1+|f(x)|^2}{2}\rho(x)$.
Mais ρ est intégrable sur I (car c'est une fonction poids) et $\rho|f|^2$ aussi (car $f \in L^2(I,\rho)$).
En conséquence, $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.

Étape 3 : On peut donc considérer sa transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ définie par : $\forall \omega \in \mathbb{R}, \hat{\varphi}(\omega) = \int_I f(x)e^{-i\omega x}\rho(x)\,dx$.

On va montrer que $\hat{\varphi}$ se prolonge en une fonction holomorphe F sur la bande $B_a = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |\mathrm{Im}\, z| < \dfrac{a}{2}\right\}$.
On pose, pour $z \in B_a$, $g(z,x) := e^{-izx}f(x)\rho(x)$.
Déjà, pour tout $z \in B_a$, on a :

$$\int_I |g(z,x)|\,dx = \int_I e^{\mathrm{Im}\, z.x}|f(x)|\rho(x)\,dx \leqslant \int_I e^{\frac{a|x|}{2}}|f(x)|\rho(x)\,dx \underset{\substack{\text{Cauchy-}\\\text{Schwarz}}}{\leqslant} \sqrt{\int_I e^{a|x|}\rho(x)\,dx}\sqrt{\int_I |f(x)|^2\rho(x)\,dx} < \infty$$

La fonction $F : \left| \begin{array}{ccc} B_a & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \int_I g(z,x)\,dx \end{array} \right.$ est donc bien définie.
On va utiliser le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale :
- $\forall z \in B_a, x \mapsto g(z,x)$ est mesurable.
- Pour presque tout $x \in I, z \mapsto g(z,x)$ est holomorphie.
- $\forall z \in B_a, |g(z,x)| \leqslant e^{\frac{a|x|}{2}}|f(x)|\rho(x)$ qui est une fonction de x, indépendante de z et qui n'a pas oublié d'être intégrable sur $\mathbb{R}$.

Donc F est holomorphe sur B_a et coïncide sur $\mathbb{R}$ avec $\hat{\varphi}$.

Étape 4 : Le théorème précédent nous permet également de calculer les dérivées de F :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in B_a, F^{(n)}(z) = (-i)^n \int_I x^n e^{-izx} f(x)\rho(x)\,dx$$

Ainsi, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F^{(n)}(0) = (-i)^n \int_I x^n f(x)\rho(x)\,dx = (-i)^n\langle f, g_n\rangle_\rho = 0$$

Par unicité du développement en série entière d'une fonction holomorphe, il existe un voisinage de 0 sur lequel $F \equiv 0$.
Par le théorème de prolongement analytique, on en déduit que $F \equiv 0$ sur B_a.
Conséquemment, $\hat{\varphi} = F_{|\mathbb{R}} \equiv 0$.
Comme φ est intégrable, on peut invoquer l'injectivité de la transformée de Fourier pour obtenir la nullité presque partout de φ sur $\mathbb{R}$.
Par stricte positivité de ρ, on en déduit que f est nulle presque partout sur I, autrement dit, $f = 0$ dans $L^2(I,\rho)$.
Ce qui prouve le théorème. ■

Références

[OA] V. BECK, J. MALICK et G. PEYRÉ – *Objectif Agrégation*, 2e éd., H&K, 2005.

Formule des compléments

Leçons : 236, 245, 207, 235, 239

[AM], section 8.4.4

Théorème

On rappelle qu'on définit la fonction Gamma d'Euler par :

$$\forall z \in \{s \in \mathbb{C} | \Re(s) > 0\}, \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \, dt$$

On a l'égalité suivante :

$$\forall z \in \{s \in \mathbb{C} | 0 < \Re(s) < 1\}, \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

On commence par montrer le lemme qui suit.

Lemme

On a l'égalité suivante :

$$\forall \alpha \in]0,1[, \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

Démonstration du lemme :

$\forall \alpha \in]0,1[$, on définit $I_\alpha := \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$.

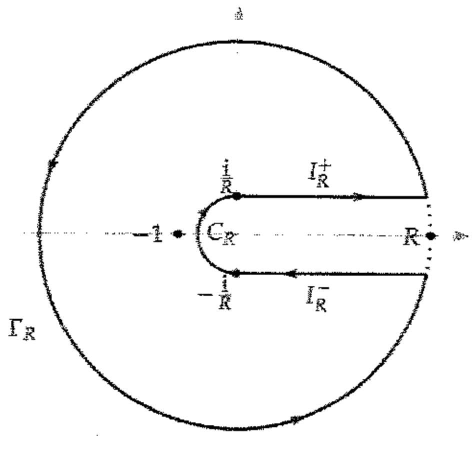
I_α est bien définie car c'est l'intégrale d'une fonction mesurable positive ; on a même $I_\alpha < +\infty$. En effet :

- $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ est continue sur $]0, +\infty[$ (donc localement intégrable) ;
- En 0 : $\frac{1}{t^\alpha(1+t)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$, qui est intégrable car $0 < \alpha < 1$;
- En $+\infty$: $\frac{1}{t^\alpha(1+t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha+1}}$, qui est intégrable car $\alpha + 1 > 1$.

On note $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ et $f : \left| \begin{array}{ccc} \Omega\setminus\{-1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{z^\alpha(1+z)} \end{array} \right.$, où l'on convient $z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$ quand $z = re^{i\theta}$, où $\theta \in]0, 2\pi[$.

La fonction f est holomorphe sur $\Omega\setminus\{-1\}$ et possède un pôle simple en -1 avec :

$$\mathrm{Res}(f, -1) = \lim_{z\to-1} (1+z) f(z) = \frac{1}{(-1)^\alpha} = e^{-i\pi\alpha}$$



Pour $R > 1$, on définit le chemin $\gamma_R = C_R \cup I_R^+ \cup \Gamma_R \cup I_R^-$, où :

- $C_R = \left\{ \frac{1}{R} e^{i\theta} \middle| \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right\}$;
- $I_R^\pm = \left[\pm\frac{i}{R}, \pm\frac{i}{R} + \sqrt{R^2 - \frac{1}{R^2}} \right]$;
- $\Gamma_R = \left\{ Re^{i\theta} \middle| \theta \in [\theta_R, 2\pi - \theta_R] \right\}$, avec $\theta_R = \arcsin \frac{\frac{1}{R}}{R}$.

Le théorème des résidus donne donc :

$$\forall R > 1, \int_{\gamma_R} f(z) \, dz = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}$$

On va passer à la limite quand $R \to +\infty$.
Tout d'abord :

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(\frac{1}{R}e^{i\theta}\right) i\frac{1}{R}e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\frac{1}{R}}{\left(\frac{1}{R}\right)^{\alpha}\left|1+\frac{1}{R}e^{i\theta}\right|}\,\mathrm{d}\theta \leqslant \pi\frac{\left(\frac{1}{R}\right)^{1-\alpha}}{1-\frac{1}{R}} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Aussi :

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{2\pi} \mathbb{1}_{[\theta_R, 2\pi-\theta_R]}(\theta)\frac{iRe^{i\theta}}{R^{\alpha}e^{i\alpha\theta}\left(1+Re^{i\theta}\right)}\,\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{R}{R^{\alpha}\left|1+Re^{i\theta}\right|}\,\mathrm{d}\theta \leqslant 2\pi\frac{R^{1-\alpha}}{R-1} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

De plus : $\displaystyle\int_{I_R^+} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{\sqrt{R^2-\frac{1}{R^2}}} f\left(\frac{i}{R}+t\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{R^2-\frac{1}{R^2}}} \frac{1}{\left(t+\frac{i}{R}\right)^{\alpha}\left(1+t+\frac{i}{R}\right)}\,\mathrm{d}t.$

Comme $\displaystyle\left(t+\frac{i}{R}\right)^{\alpha} = \left(\sqrt{t^2+\frac{1}{R^2}}\exp\left(i\arctan\frac{\frac{1}{R}}{t}\right)\right)^{\alpha} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} t^{\alpha}$, on a :

- $\displaystyle\mathbb{1}_{\left]0,\sqrt{R^2-\frac{1}{R^2}}\right]}(t) f\left(\frac{i}{R}+t\right) \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)\frac{1}{t^{\alpha}(1+t)}$;
- $\displaystyle\left|\mathbb{1}_{\left]0,\sqrt{R^2-\frac{1}{R^2}}\right]}(t) f\left(\frac{i}{R}+t\right)\right| \leqslant \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)\frac{1}{t^{\alpha}(1+t)}$ qui est intégrable.

Par théorème de convergence dominée, on déduit :

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{I_R^+} f(z)\,\mathrm{d}z = I_{\alpha}$$

Enfin, de la même façon, en utilisant le fait que $\displaystyle\left(t-\frac{i}{R}\right)^{\alpha} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} t^{\alpha}e^{2i\pi\alpha}$, on a :

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{I_R^-} f(z)\,\mathrm{d}z = -e^{-2i\pi\alpha}I_{\alpha}$$

Donc $\left(1-e^{-2i\pi\alpha}\right)I_{\alpha} = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}$, c'est-à-dire :

$$I_{\alpha} = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$$

■

Démonstration du théorème :

D'après le théorème des zéros isolés, il suffit de prouver l'égalité pour $z = \alpha \in]0,1[$. Soit donc $\alpha \in]0,1[$.
En utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) &= \left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} s^{-\alpha}e^{-s}\,\mathrm{d}s\right) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} s^{-\alpha}t^{\alpha-1}e^{-t-s}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{s}\right)^{\alpha}e^{-(s+t)}\,\mathrm{d}s\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\end{aligned}$$

On réalise le changement de variables donné par le système $\left\{\begin{array}{lll} u & = & s+t \\ v & = & \frac{s}{t}\end{array}\right.$ et dont le jacobien vaut

$$\left|\det\begin{pmatrix}1 & 1 \\ \frac{1}{t} & \frac{-s}{t^2}\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{t}+\frac{s}{t^2} = \frac{1}{t}+\frac{v}{t} = \frac{v+1}{t}$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} v^{-\alpha}e^{-u}\frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{v+1} = \int_0^{+\infty}\frac{1}{v^{\alpha}(v+1)}\int_0^{+\infty}e^{-u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}v}{v^{\alpha}(v+1)} \\ &= \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\end{aligned}$$

■

Références

[AM] É. AMAR et É. MATHERON – *Analyse complexe*, Cassini, 2004.