239

Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre
Exemples et applications

Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. Notons $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

<u>THM1</u> : (Convergence dominée) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ telle que : (i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers f

(ii) il existe $g\in L^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}, |f_n|\le g$ p.p.

alors $f\in L^1(\mu)$ et $\int_E |f_n-f|\,d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

I Régularité des intégrales à paramètres

Soit (Y,d) un espace métrique. On étudie $F: y\in Y\mapsto \int_E f(x,y)\,d\mu(x)$

<u>THM2</u> : (Continuité sous le signe intégral)

Soit $y_0\in Y$. Si f vérifie

(i) $\forall y\in Y$, $x\mapsto f(x,y)$ est mesurable,

(ii) μ-p.p.t. $x\in E$, $y\mapsto f(x,y)$ est continue en y_0,

(iii) $\exists g\in L^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$, $\forall y\in Y$, μ-p.p.t. $x\in E$, $|f(x,y)|\le g(x)$

alors F est bien définie sur Y et continue en y_0.

<u>RQ3</u> : Si le THM2 est vérifié en tout point de Y, alors $F\in C^0(Y,\mathbb{K})$

<u>CEX4</u> : La domination est en défaut pour $\int_{\mathbb{R}_+} y e^{-yx}\,dx = \begin{cases} 1 & \text{si } y>0 \\ 0 & \text{si } y=0 \end{cases}$.

<u>EX5</u> : La fonction gamma d'Euler est bien définie et continue.

$$\Gamma: y\in]0,+\infty[\mapsto \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{y-1}\,dx$$

<u>THM8</u> : (Dérivation sous le signe intégral) Ici I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$

Si f vérifie : (i) $\forall y\in I$, $x\mapsto f(x,y)\in L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$,

(ii) μ-p.p.t. $x\in E$, $y\mapsto f(x,y)$ est dérivable sur I,

(iii) μ-p.p.t. $x\in E$, $\forall y\in I$, $|\partial_y f(x,y)|\le g(x)$ où $g\in L^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$

alors F est bien définie et dérivable sur I, avec

$$\forall y\in Y,\quad F'(y)=\int_E \partial_y f(x,y)\,d\mu(x)$$

<u>RQ9</u> : Remplacer "dérivable" par "C^1" dans (ii) permet d'obtenir $F\in C^1(I)$.

<u>RQ10</u> : Avec $E=\mathbb{N}$ et $\mu=m$ la mesure de comptage, on retrouve les théorèmes de continuité et dérivabilité des séries de fonctions.

<u>CEX11</u> : $(x,y)\mapsto y^2e^{-xy}$ est dérivable par rapport à y sur $\mathbb{R}$, mais $y\mapsto \int_{\mathbb{R}_+} y^2e^{-xy}\,dx$ ne l'est pas.

<u>EX12</u> : $\Gamma\in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})$. Par récurrence, $\Gamma\in C^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ et

$\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in]0,\infty[, \Gamma^{(n)}(x)=\int_0^\infty (\ln t)^n e^{-t}t^{x-1}\,dt$

<u>APP13</u> : Calcul de l'intégrale de Gauss $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$ via l'étude de $g: x\in\mathbb{R}^+\mapsto \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\exp(-(t^2+1)x)\,dt$

<u>THM14</u> : (Holomorphie sous le signe intégral)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Si $f: E\times\Omega$ vérifie

(i) $\forall z\in\Omega$, $x\mapsto f(x,z)\in L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$

(ii) μ-p.p.t. x, $z\mapsto f(x,z)\in\mathcal{H}(\Omega)$

(iii) μ-p.p.t. x, $\forall z\in\Omega$, $|f(x,z)|\le g(x)$ où $g\in L^1_{\mathbb{R}_+}$

alors $F\in\mathcal{H}(\Omega)$ et $\forall n\in\mathbb{N}, z\in\Omega$, $F^{(n)}(z)=\int_E \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(x,z)\,d\mu(x)$.

<u>RQ15</u> : Seule f nécessite d'être dominée ici.

<u>EX16</u> : Γ est bien définie et holomorphe sur $\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}(z)>0\}$.

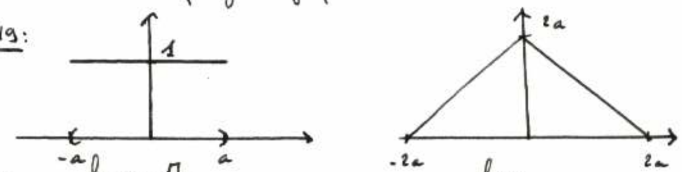
II. Le produit de convolution

<u>DÉF17</u> : Soient f,g boréliennes. Si $y\in\mathbb{R}^d\mapsto f(y)g(x-y)$ est intégrable pour $x\in\mathbb{R}^d$, on définit la convolée de f et g en x comme

$$f*g : x\in\mathbb{R}^d\mapsto\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,dy$$

<u>PROP18</u> : Soit $x\in\mathbb{R}^d$. $f*g(x)$ existe si et seulement si $g*f(x)$ existe, et dans ce cas $f*g(x)=g*f(x)$.

<u>EX19</u> :



$a>0$, $f=g=\mathbb{1}_{[-a,a]}$

<u>PROP20</u> : Pour tout $p\in[1,\infty]$,

si $(f,g)\in L^1\times L^p$ alors $f*g\in L^p$ et $\|f*g\|_{L^p}\le\|f\|_{L^1}\cdot\|g\|_{L^p}$.

si $(f,g)\in L^p\times L^{p'}$ alors $f*g$ est uniformément continue et $|f*g|\le\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}$

<u>COR21</u> : $(L^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^d),+,\cdot,*)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative sans neutre pour $*$.

THM 22 : Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$
alors $f*\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ et $\frac{\partial}{\partial x_i}(f*\varphi) = f*\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)$

DÉF 23 : On appelle identité approchée ~~toute~~ suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^1(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ telle que
(i) $\varphi_n \geq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
(ii) $\|\varphi_n\|_{L^1} = 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
(iii) $\forall \eta>0, \int_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,\eta)} \varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

EX 24 : $\varphi : x\in\mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si } |x|<1 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \in C_c^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$

et $\varphi_n : x\in\mathbb{R}\mapsto n\varphi(nx)$ constitue une identité approchée.

THM 25 : • Si $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$, $f*\varphi_n \xrightarrow{L^p} f$ pour $1\le p<\infty$,
• Si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$, $f*\varphi_n \xrightarrow{L^\infty} f$.

APP 26 : $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $1\le p<\infty$.

DÉF 27 : On définit de même la convolée sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

DÉF 28 : On appelle noyau de Fejer les fonctions
$N\in\mathbb{N}$, $K_N : t\mapsto \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$

PROP 29 : $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une identité approchée.

APP 30 : (Théorème de Fejer)
• Si f est continue sur $\mathbb{T}$, alors $K_n*f \xrightarrow[n\to\infty]{L^\infty} f$
• Si $f\in L^p(\mathbb{T})$, $p\in[1,\infty]$, alors $K_n*f \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} f$

APP 31 : $(t\mapsto e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

III. Transformée de Fourier

DÉF 32 : Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$. On définit la transformée de Fourier de f comme
$$\hat f := \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \xi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\xi t}\,dt \end{array}$$

PROP 33 : Pour $f\in L^1(\mathbb{R})$, $\hat f$ est bien définie, continue et bornée par $\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$.

LEM 34 : (Riemann-Lebesgue) $\forall f\in L^1(\mathbb{R})$, $\hat f(\xi) \xrightarrow[|\xi|\to\infty]{} 0$

EX 35 : $\widehat{\mathbb{1}_{[-a,a]}}(\xi) = \begin{cases} 2\,\frac{\sin(\xi a)}{\xi} & \text{si } \xi\neq 0 \\ 2a & \text{si } \xi = 0\end{cases}$

PROP 36 : • Si $f\in L^1(\mathbb{R})$ et $t\mapsto tf(t)\in L^1(\mathbb{R})$ alors $\hat f\in C^1(\mathbb{R})$ et $\forall\xi\in\mathbb{R}$, $\hat f'(\xi) = -i\,\widehat{t\mapsto tf(t)}(\xi)$
• Si $f\in L^1(\mathbb{R})$ et $t\mapsto t^n f(t)\in L^1(\mathbb{R})$ alors $\hat f\in C^n(\mathbb{R})$ et $\forall k\le n$, $\forall\xi\in\mathbb{R}$, $(\partial_k \hat f)(\xi) = i^k\,\widehat{t\mapsto t^k f(t)}(\xi)$
• Si $f\in C^1(\mathbb{R})$ et $f'\in L^1(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f'}(\xi) = i\xi\hat f(\xi)$, $\forall\xi\in\mathbb{R}$.

THM 37 : Si $f,g\in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f*g} = \hat f\cdot\hat g$.

EX 38 : Calcul de $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$.

THM 39 : Si $f\in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat f\in L^1(\mathbb{R})$ alors
$\forall t\in\mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat f(\xi)e^{it\xi}\,d\xi$

COR 40 : $\begin{array}{l} L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0^0(\mathbb{R}) \\ f \longmapsto \hat f \end{array}$ est injective.

APPLI 41 : Base hilbertienne des espaces $L^2(I,\rho)$:
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\rho : I\to\mathbb{R}_+^*$ mesurable.
$$L^2(I,\rho) := \left\{ f : I\to\mathbb{R} \text{ mes.} : \int_I f^2\rho\,d\lambda < \infty \right\}$$
Muni du produit hermitien suivant,
$$\langle\cdot|\cdot\rangle_\rho : \begin{array}{l} L^2(I,\rho)^2 \longrightarrow \mathbb{C} \\ (f,g) \longmapsto \int_I f\bar g \end{array}$$
c'est un espace de Hilbert.

PROP 42: Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux deux-à-deux tels que $\deg P_n = n, \forall n$.

THM 43: S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,dx < \infty$, alors la famille de polynômes orthogonaux associée à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$ pour $\|.\|_\rho$. $\boxed{\text{DÉV (I)}}$

IV Transformée et méthode de Laplace

DÉF 44: Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$. On appelle transformée de Laplace de f la fonction $L(f) := x\in\mathbb{R} \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,dt$ lorsque cette intégrale converge.

EX 45: $L(1)(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 0$. $L(\sin)(x) = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}_+$.

CEX 46: $t \mapsto e^{t^2}$ n'admet pas de transformée de Laplace.

PROP 47: Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$,

- Si $\int_0^\infty f(t)e^{-xt}\,dt$ converge absolument, alors $\int_0^\infty f(t)e^{-yt}\,dt$ également, $\forall y \geq x$.
- Si f est bornée, alors $L(f) \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et $L(f)^{(n)}(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0, \forall n$, avec $\forall n\in\mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $L(f)^{(n)}(x) = (-1)^n\int_0^\infty t^n f(t)e^{-xt}\,dt$

APPLI 48: Calcul de $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$. $\boxed{\text{DÉV (II)}}$

THM 49: (Méthode de Laplace) Soit $[a,b[\subset \mathbb{R}$, $a < b \leq \infty$.
Soit $\varphi : [a,b[\to \mathbb{R}$ C^2 telle que $\varphi' > 0$ sur $]a,b[$,
$f : [a,b[\to \mathbb{C}$ telle que $e^{-x_0\varphi}f \in L^1[a,b[$ pour un $x_0 \in \mathbb{R}$, et continue en a avec $f(a) \neq 0$.
Alors $F : x \mapsto \int_a^b e^{-x\varphi(t)}f(t)\,dt$ est bien définie sur $x > x_0$ et

- Si $\varphi'(a) > 0$, alors $F(t) \underset{t\to\infty}{\sim} \frac{1}{\varphi'(a)}\cdot\frac{1}{t}\cdot\exp(-t\varphi(a))f(a)$
- Si $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$, alors $F(t) \underset{t\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\exp(-t\varphi(a))f(a)$

APP 50: Formule de Stirling $\Gamma(x+1) \underset{x\to\infty}{\sim} x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}$

V Théorie de Cauchy

Ω ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $D = \overline{B}(z_0,R) \subset \Omega$

THM 51: (de Cauchy) D'après les hypothèses ci-dessus, $\int_{\partial D} f = 0$

THM 52: (Formule de Cauchy) $\forall z \in \mathring{D}$, $f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$

COR 53: $\forall z \in \mathring{D}$, $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta$

APPLI 54: Toute fonction holomorphe sur Ω est développable en série entière au voisinage de tout point de Ω.

COR 55: (Formule de la moyenne) $f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta})\,d\theta$

DÉF 56: Soit $z \in \mathbb{C}$, γ un lacet dans $\mathbb{C}\setminus\{z\}$.
L'indice de γ par rapport au point z est défini comme

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z) := \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

EX 57: Avec $\gamma(t) = e^{2i\pi t}$, on a $\mathrm{Ind}(\gamma, 0) = 1$.

DÉF 58: Soit $a \in \mathbb{C}$, $a \notin \Omega$, supposons qu'il existe $\mathcal{C}$ une couronne centrée en a tel que $\mathcal{C} \subset \Omega$. Soit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n$ le développement en série de Laurent de f en a. On définit le résidu de f en a comme $\mathrm{Res}(f,a) := a_{-1}$

THM 59: (des résidus) Soit A l'ensemble des pôles de f dans Ω (fini). Si γ est un chemin fermé dans $\Omega\setminus A$, alors

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{a\in A}\mathrm{Res}(f,a)\,\mathrm{Ind}(\gamma,a)$$

APPLI 60: Calcul d'intégrales et de transformées de Fourier.

EX 61: Calcul de $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a + \sin t}$ pour $a > 1$.

EX 62: Calcul de $\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+t^4}e^{-itx}\,dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}}e^{-\frac{|x|}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{|x|}{\sqrt{2}} + \sin\frac{|x|}{\sqrt{2}}\right)$.

RÉF: Briane-Pagès, Théorie de l'intégration
Gourdon, Les maths en tête, Analyse
Queffélec-Zuily, Analyse pour l'agrégation
Beck-Malick-Peyré, Objectif Agrégation
Tauvel, Analyse complexe pour la L3